Exercice 1 :

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1}=\frac{3+U_n}{5-U_n}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad \text{et}\quad U_0=2$$

1) Montrer que : $U_{n+1}-3=\dfrac{4(U_n-3)}{2+(3-U_n)}$

$$U_{n+1}-3=\frac{3+U_n}{5-U_n}-3=\frac{3+U_n-15+3U_n}{2+3-U_n}$$

$$=\frac{4U_n-12}{2+3-U_n}=\frac{4(U_n-3)}{2+(3-U_n)}$$

Puis montrer que : $U_n<3\quad \forall n\in\mathbb{N}$

On considère la suite (U_n) définie par :

Pour n = 0 on a $U_0=2$ donc $U_0<3$

Soit $n\in\mathbb{N}$ supposons que $U_n<3$ et montrons que $U_{n+1}<3$ c'est-à-dire $U_{n+1}-3<0$

On a $U_{n+1}-3=\dfrac{4(U_n-3)}{2+(3-U_n)}$

Puisque $U_n<3$ donc $U_n-3<0$ et $3-U_n>0$

Donc $U_{n+1}-3=\dfrac{4(U_n-3)}{2+(3-U_n)}<0$ donc $U_{n+1}<3$

D'où $U_n<3\quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n=\frac{U_n-1}{3-U_n}\qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

a – Montrons que $V_{n+1}=\dfrac{1}{2}V_n$?

$$V_{n+1}=\frac{U_{n+1}-1}{3-U_{n+1}}=\frac{\frac{3+U_n}{5-U_n}-1}{-\frac{4(U_n-3)}{5-U_n}}=\frac{\frac{3+U_n-5+U_n}{5-U_n}}{\frac{4(3-U_n)}{5-U_n}}$$

$$V_{n+1}=\frac{2(U_n-1)}{4(3-U_n)}=\frac{1}{2}\left(\frac{U_n-1}{3-U_n}\right)\quad \text{donc}\quad V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n$$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$

$$V_0=\frac{U_0-1}{3-U_0}=1\quad \text{et}\quad V_n=V_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

D'où $V_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\quad \forall n\in\mathbb{N}$

b – On a $V_n=\dfrac{U_n-1}{2U_n-1}\Leftrightarrow V_n(3-U_n)=U_n-1$

$$\Leftrightarrow 3V_n+1=U_n+V_nU_n\Leftrightarrow U_n(1+V_n)=3V_n+1$$

D'où $U_n=\dfrac{1+3V_n}{1+V_n}\qquad \forall n\in\mathbb{N}$

D'où $U_n=\dfrac{1+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}\qquad \forall n\in\mathbb{N}$

c) $\lim U_n=\lim\dfrac{1+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=1$

Car $-1<\dfrac{1}{2}<1$ et $\lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$

Exercice 2 :

C(2, 2,1) ; B(3, 1, 1) ; A(2, 1, 3),

1) a – Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&1\\-2&-2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&0\\-2&-2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$$

D'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}==2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

b – En déduire que 2x + 2y + z – 9 = 0 est une équation cartésienne du plan (ABC).

Soit $M(x\,;y\,;z)\in(ABC)$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC)

(ABC) : 2x + 2y + z + d = 0 or $A(2, 1, 3)\in(ABC)$

Donc $2\times2+2\times1+3+d=0$ donc $d=-9$

D'où (ABC) : 2x + 2y + z – 9 = 0

2) Soit (S) la sphère d'équation :

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-34=0$$

a) Montrer que le centre de (S) est $\Omega(1,-1,0)$ et pour rayon 6.

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-34=0$$

$$a=\frac{-2}{-2}=1\ ;\ b=\frac{2}{-2}=-1\ ;\ c=0\ ;\ d=-34$$

$$a^2+b^2+c^2-d=(1)^2+(-1)^2+0^2-(-34)=36>0$$

Donc le centre de (S) est $\Omega(1;-1;0)$ et $R=\sqrt{36}=6$

D'où $\Omega(1;-1;0)$ et rayon $R=6$

b – Montrer que $\mathbf{d}(\Omega,(\mathbf{ABC}))=3$

(ABC) : 2x + 2y + z – 9 = 0 $\Omega(1;-1;0)$

$$\mathbf{d}(\Omega,(\mathbf{ABC}))=\frac{|2\times1+2\times(-1)+0-9|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{9}{3}=3$$

D'où $\mathbf{d}(\Omega,(\mathbf{ABC}))=3$

On a $\mathbf{d}(\Omega,(\mathbf{ABC}))=3$ et $\mathbf{R}=6$

Donc $\mathbf{d}(\Omega,(\mathbf{ABC}))<\mathbf{R}$

Donc le plan (ABC) coupe la sphère selon un cercle (Γ)

3) a - Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et Orthogonal au plan (ABC).

On a (Δ) est Orthogonal au plan (ABC)

On a $\overrightarrow{\mathbf{AB}}\wedge\overrightarrow{\mathbf{AC}}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC)

Don c'est un vecteur directeur de la droite (Δ)

Soit M(x ;y ;z)∈ (Δ)

$$(\Delta):\begin{cases}\mathbf{x}=1+2\mathbf{t}\\ \mathbf{y}=-1+2\mathbf{t}\\ \mathbf{z}=0+\mathbf{t}\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$$

b) B est le centre du cercle (Γ) $(\Delta)\cap(\mathbf{ABC})=\{\mathbf{B}\}$?

Première méthode :

M(x ;y ;z) $\mathbf{M}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})\in(\Delta)\cap(\mathbf{ABC})$ équivaut à

$$\begin{cases}\mathbf{x}=1+2\mathbf{t}\\ \mathbf{y}=-1+2\mathbf{t}\\ \mathbf{z}=\mathbf{t}\\ 2\mathbf{x}+2\mathbf{y}+\mathbf{z}-9=0\end{cases}$$

$2(1+2\mathbf{t})+2(-1+2\mathbf{t})+\mathbf{t}-9=0$

Donc $2+4\mathbf{t}-2+4\mathbf{t}+\mathbf{t}-9=0\Leftrightarrow9\mathbf{t}=9\Leftrightarrow\mathbf{t}=1$

$\begin{cases}\mathbf{x}=1+2\\ \mathbf{y}=-1+2\\ \mathbf{z}=1\end{cases}$ d'où B(3 ;1 ;1) est le centre du cercle (Γ)

Deuxième méthode :

On a $(\Delta)\cap(\mathbf{ABC})=\{\mathbf{B}\}$ et on sait que B ∈ (ABC) il suffit de montrer que B ∈ (Δ) B(3 ;1 ;1)

$\begin{cases}3=1+2\mathbf{t}\\ 1=-1+2\mathbf{t}\\ 1=\mathbf{t}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2=2\mathbf{t}\\ 2=+2\mathbf{t}\\ 1=\mathbf{t}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbf{t}=1\\ \mathbf{t}=1\\ \mathbf{t}=1\end{cases}$ donc B ∈ (Δ)

D'où B(3 ;1 ;1) est le centre du cercle (Γ).

Exercice 3 :

1) Résoudre dans C : $\mathbf{z}^2-4\mathbf{z}+29=0$

$\Delta=(-4)^2-4\times1\times29=-100$

$=(10\mathbf{i})^2$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$\mathbf{z}_1=\frac{4+10\mathbf{i}}{2}=2+5\mathbf{i}$ et $\mathbf{z}_2=\overline{\mathbf{z}_1}=2-5\mathbf{i}$

D'où $\mathbf{S}=\{2-5\mathbf{i};2+5\mathbf{i}\}$

2) Ω, A et B d'affixes respectives ω = 2 + 5i ; a = 5+2i ; b = 5 + 8i

a) u = b – ω

Vérifier que u = 3 + 3i

u = b – ω = 5 + 8i – (2 + 5i) = 5 + 8i – 2 – 5i = 3 + 3i

d'où u = 3 + 3i

$|\mathbf{u}|=|3(1+\mathbf{i})|=3|1+\mathbf{i}|=3\sqrt{1^2+1^2}=3\sqrt{2}$

$\mathbf{u}=3(1+\mathbf{i})=3\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}+\mathbf{i}\frac{1}{\sqrt{2}})=3\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2})$

$\mathbf{u}=3\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4})$

D'où $\arg(\mathbf{u})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

b) Déterminer un argument de $\overline{\mathbf{u}}$ le conjugué de u

on sait que $\arg\overline{\mathbf{u}}\equiv-\arg\mathbf{u}[2\pi]$

d'où $\arg\overline{\mathbf{u}}\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

c)) Vérifier que $\mathbf{a}-\boldsymbol{\omega}=\overline{\mathbf{u}}$

$\mathbf{a}-\boldsymbol{\omega}=5+2\mathbf{i}-(2+5\mathbf{i})=5+2\mathbf{i}-2-5\mathbf{i}=3-3\mathbf{i}$

$\mathbf{a}-\boldsymbol{\omega}=3-3\mathbf{i}=\overline{\mathbf{u}}$

En déduire que $\Omega\mathbf{A}=\Omega\mathbf{B}$ et $\arg\left(\frac{\mathbf{b}-\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{a}-\boldsymbol{\omega}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

On $\mathbf{a}-\boldsymbol{\omega}=\overline{\mathbf{u}}$ et $\mathbf{u}=\mathbf{b}-\boldsymbol{\omega}$

On sait que $|\mathbf{u}|=|\overline{\mathbf{u}}|$

Donc $|\mathbf{u}|=|\overline{\mathbf{u}}|\Leftrightarrow|\mathbf{b}-\boldsymbol{\omega}|=|\mathbf{a}-\boldsymbol{\omega}|\Leftrightarrow\Omega\mathbf{A}=\Omega\mathbf{B}$

$\arg\left(\frac{\mathbf{b}-\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{a}-\boldsymbol{\omega}}\right)\equiv\arg(\mathbf{b}-\boldsymbol{\omega})-\arg(\mathbf{a}-\boldsymbol{\omega})[2\pi]$

$\equiv\arg(\mathbf{u})-\arg(\overline{\mathbf{u}})\frac{\pi}{2}[2\pi]\equiv\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4})[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où $\arg\left(\frac{\mathbf{b}-\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{a}-\boldsymbol{\omega}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

d) Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Déterminer l'image du point A par la rotation R $\mathbf{R}(\mathbf{A})$?

$\mathbf{R}(\mathbf{A})=A'\Leftrightarrow a'=e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}(\mathbf{a}-\boldsymbol{\omega})+\boldsymbol{\omega}\Leftrightarrow\mathbf{a}'=e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}\overline{\mathbf{u}}+\boldsymbol{\omega}$

$\Leftrightarrow\mathbf{a}'=\mathbf{i}(3-3\mathbf{i})+2+5\mathbf{i}\Leftrightarrow\mathbf{a}'=3\mathbf{i}+3+2+5\mathbf{i}$

$\Leftrightarrow\mathbf{a}'=5+8\mathbf{i}=\mathbf{b}$

D'où $\mathbf{R}(\mathbf{A})=B$

Problème :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2x-2+e^{2x}-4e^{x}$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 1 cm)

1) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2x-2+e^{2x}-4e^{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2x-2+\left(e^{x}\right)^2-4e^{x}=-\infty$$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-2=-\infty$

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y=2x-2$ est asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(2x-2)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{x}\right)^2-4e^{x}=0$$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ donc la droite (D) d'équation $y=2x-2$ est asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

2) a – Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x-2+e^{x}(e^{x}-4)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} 2x-2=+\infty$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-2+e^{x}(e^{x}-4)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty} 2-\frac{2}{x}+\frac{e^{x}}{x}(e^{x}-4)=+\infty$$

Car **Erreur ! Signet non défini.** et

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}(e^{x}-4)=+\infty$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ d'où la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

3) a – Montrer que $f'(x)=2(e^{x}-1)^2 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=2x-2+e^{2x}-4e^{x}$$

$$f'(x)=2+2e^{2x}-4e^{x}=2((e^{x})^2-2e^{x}+1)$$

D'où $f'(x)=2(e^{x}-1)^2 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
(Remarquer que $f(0)=0$)

On a $f'(x)=2(e^{x}-1)^2 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc $f'(x)\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc f est croissante sur R.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

c) Montrer qu'il existe un réel unique α dans l'intervalle $]1,\ln 4[$ tel que $f(\alpha)=0$

f est continue et strictement croissante sur R en particulier sur $[1;\ln 4]$

$f(1)=e^2-4e<0$ $e^2-4e\approx-3{,}51$ donc $f(1)<0$

$$f(\ln 4)=2\ln 4-2+e^{2\ln 4}-4e^{\ln 4}$$

$$f(\ln 4)=2\ln 4-2+e^{\ln 4^2}-4\times 4$$

$$f(\ln 4)=2\ln 4-2+16-16=2\ln 4-2>0$$

$f(\ln 4)>0$ donc $f(1)f(\ln 4)<0$

D'où l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α dans $]1;\ln 4[$

4) a) Montrer que (C_f) se trouve au-dessus de (D) sur $]\ln 4,+\infty[$ et en dessous de (D) sur $]-\infty,\ln 4[$

$$f(x)-(2x-2)=e^{2x}-4e^{x}=e^{x}(e^{x}-4)$$

$$f(x)-(2x-2)=0\Leftrightarrow e^{x}(e^{x}-4)=0$$

Or $\forall x\in\mathbb{R} \quad e^{x}>0$

$$e^{x}-4=0\Leftrightarrow e^{x}=4\Leftrightarrow x=\ln 4$$

x	$-\infty$	ln4	$+\infty$
$e^{x}-4$	−	0	+

(C_f) se trouve au-dessus de (D) sur $]\ln 4,+\infty[$ et en dessous de (D) sur $]-\infty,\ln 4[$

b – Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion de coordonnées (0 ;5).

$$f''(x)=4(e^{x}-1)e^{x}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow e^{x}-1=0\Leftrightarrow e^{x}=1\Leftrightarrow x=0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	−	0	+

C_f) admet un point d'inflexion de coordonnées (0 ;–5)

$f(0)=-5$

5) a) Montrer que $\int_0^{\ln 4}(e^{2x}-4e^{x})dx=-\dfrac{9}{2}$

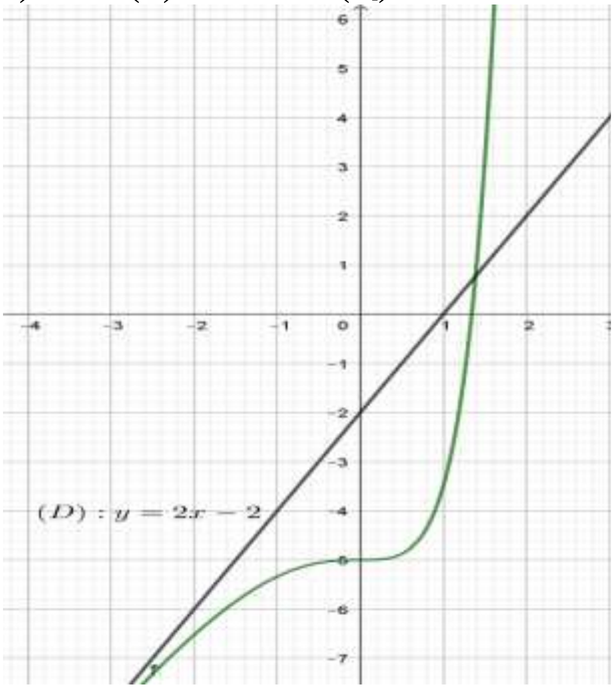
$$\int_0^{\ln 4}(e^{2x}-4e^{x})dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-4e^{x}\right]_0^{\ln 4}$$

$$\int_0^{\ln 4}(e^{2x}-4e^{x})dx=\frac{1}{2}e^{2\ln 4}-4e^{\ln 4}-(\frac{1}{2}-4)$$

$$\int_0^{\ln 4}(e^{2x}-4e^{x})dx=8-16+\frac{7}{2}=-\frac{9}{2}$$

D'où $\int_0^{\ln 4}(e^{2x}-4e^{x})dx=-\dfrac{9}{2}$

4) Tracer (D) et la courbe (C_f).



5) b) Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par (C), la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation x = ln4

$$\mathbf{A}=\int_0^{\ln 4}\left|\mathbf{f}(\mathbf{x})-(2\mathbf{x}-2)\right|\mathbf{dx}\,1\mathbf{cm}\times 1\mathbf{cm}$$

$(\mathbf{C_f})$ se trouve en dessous de (D) sur $]-\infty,\ln 4]$

$$\mathbf{A}=\int_0^{\ln 4}-(\mathbf{e}^{2\mathbf{x}}-4\mathbf{e}^{\mathbf{x}})\mathbf{dx}(\mathbf{cm}^2)$$

$$\mathbf{A}=-\int_0^{\ln 4}(\mathbf{e}^{2\mathbf{x}}-4\mathbf{e}^{\mathbf{x}})\mathbf{dx}(\mathbf{cm}^2)$$

$$\mathbf{A}=\frac{9}{2}(\mathbf{cm}^2)$$

<u>Partie II :</u>

1) a) Résoudre l'équation différentielle

$(E) : y''-3y'+2y=0$

L'équation caractéristique de (E) est

$\mathbf{r}^2-3\mathbf{r}+2=0$ donc $\Delta=1$

Donc $\mathbf{r}_1=\frac{3+1}{2}=2$ et $\mathbf{r}_2=\frac{3-1}{2}=1$

Donc les solutions de (E) sont :

$\mathbf{x}\rightarrow\boldsymbol{\alpha}\mathbf{e}^{2\mathbf{x}}+\boldsymbol{\beta}\mathbf{e}^{\mathbf{x}}$ où $(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta})\in\mathbb{R}^2$

b) Déterminer la solution g de (E) tels que g(0) = −3 et g′(0) = −2

g est une solution de de(E) donc: $\mathbf{g}(\mathbf{x})=\boldsymbol{\alpha}\mathbf{e}^{2\mathbf{x}}+\boldsymbol{\beta}\mathbf{e}^{\mathbf{x}}$

$\mathbf{g}(0)=-3\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}\mathbf{e}^{2\times 0}+\boldsymbol{\beta}\mathbf{e}^0=-3$

$\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=-3$ (1)

$\mathbf{g}'(\mathbf{x})=2\boldsymbol{\alpha}\mathbf{e}^{2\mathbf{x}}+\boldsymbol{\beta}\mathbf{e}^{\mathbf{x}}$

$\mathbf{g}'(0)=-2\Leftrightarrow 2\boldsymbol{\alpha}\mathbf{e}^{2\times 0}+\boldsymbol{\beta}\mathbf{e}^0=-2$

$\Leftrightarrow 2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=-2$ (2)

(1) – (2) $\Leftrightarrow 2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=-2+3\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=1$

On a $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=-3\Leftrightarrow\boldsymbol{\beta}=-3-\boldsymbol{\alpha}\Leftrightarrow\boldsymbol{\beta}=-4$

D'où $\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{e}^{2\mathbf{x}}-4\mathbf{e}^{\mathbf{x}}$

2) Soit h la fonction définie sur $]\ln 4;+\infty[$ par :

$\mathbf{h}(\mathbf{x})=\ln(\mathbf{e}^{2\mathbf{x}}-4\mathbf{e}^{\mathbf{x}})$

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} est définie sur R.

$\mathbf{h}(\mathbf{x})=\ln(\mathrm{g}(\mathrm{x}))$

On a $\mathbf{g}$ est continue strictement positive sur $]\ln 4;+\infty[$ (car g est une solution de (E) donc deux fois dérivable sur R et $(\mathbf{C_f})$ se trouve au-dessus de (D) sur $]\ln 4,+\infty[$) et ln continue sur $]0;+\infty[$

Donc h est continue sur $]\ln 4;+\infty[$.

$$\mathbf{h}'(\mathbf{x})=\frac{\mathbf{g}'(\mathbf{x})}{\mathbf{g}(\mathbf{x})}=\frac{2(\mathbf{e}^{\mathbf{x}}-2)}{\mathbf{e}^{\mathbf{x}}-4}\quad\forall\mathbf{x}\in\,]\ln 4;+\infty[$$

$$\mathbf{x}>\ln 4\Leftrightarrow\mathbf{e}^{\mathbf{x}}>\mathbf{e}^{\ln 4}\Leftrightarrow\mathbf{e}^{\mathbf{x}}-2>4-2$$

Donc $\forall\mathbf{x}\in\,]\ln 4;+\infty[\quad\mathbf{e}^{\mathbf{x}}-2>2$ et $\mathbf{e}^{\mathbf{x}}-4>0$

Donc $\frac{2(\mathbf{e}^{\mathbf{x}}-2)}{\mathbf{e}^{\mathbf{x}}-4}>0$ donc $\mathbf{h}'(\mathbf{x})>0$; $\forall\mathbf{x}>\ln 4$

Donc h est strictement croissante sur $]\ln 4;+\infty[$

Donc h admet une fonction réciproque h^{-1} est définie sur $\mathbf{h}(]\ln 4;+\infty[)$

$$\mathbf{h}(]\ln 4;+\infty[)=\left]\lim_{\mathbf{x}\to(\ln 4)^+}\mathbf{h}(\mathbf{x});\lim_{\mathbf{x}\to+\infty}\mathbf{h}(\mathbf{x})\right[$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to+\infty}\mathbf{h}(\mathbf{x})=\lim_{\mathbf{x}\to+\infty}\ln(\mathbf{e}^{2\mathbf{x}}-4\mathbf{e}^{\mathbf{x}})=+\infty$$

$\lim_{\mathbf{t}\to+\infty}\mathbf{e}^{\mathbf{x}}(\mathbf{e}^{\mathbf{x}}-4)=+\infty$ et $\lim_{\mathbf{t}\to+\infty}\ln(\mathbf{t})=+\infty$

$$\lim_{\mathbf{x}\to(\ln 4)^+}\mathbf{h}(\mathbf{x})=\lim_{\mathbf{x}\to(\ln 4)^+}\ln(\mathbf{e}^{2\mathbf{x}}-4\mathbf{e}^{\mathbf{x}})=-\infty$$

$\lim_{\mathbf{x}\to(\ln 4)^+}(\mathbf{e}^{2\mathbf{x}}-4\mathbf{e}^{\mathbf{x}})=0^+$ et $\lim_{\mathbf{t}\to 0^+}\ln(\mathbf{t})=-\infty$

$\forall\mathbf{x}\in\,]\ln 4;+\infty[\quad\mathbf{e}^{2\mathbf{x}}-4\mathbf{e}^{\mathbf{x}}>0$

b) Vérifier que h(ln5) = ln5 puis déterminer $\left(\mathbf{h}^{-1}\right)'(\ln 5)$

$$\mathbf{h}(\ln 5)=\ln(\mathbf{e}^{2\ln 5}-4\mathbf{e}^{\ln 5})=\ln(\mathbf{e}^{\ln 5^2}-4\times 5)$$

$$\mathbf{h}(\ln 5)=\ln(25-20)=\ln 5$$

$$\left(\mathbf{h}^{-1}\right)'(\ln 5)=\frac{1}{\mathbf{h}'(\mathbf{h}(\ln 5))}=\frac{1}{\mathbf{h}'(\ln 5)}$$

Or $\mathbf{h}'(\ln 5)=\frac{2(\mathbf{e}^{\ln 5}-2)}{\mathbf{e}^{\ln 5}-4}=\frac{2(5-2)}{5-4}=6$

D'où $\left(\mathbf{h}^{-1}\right)'(\ln 5)=\frac{1}{6}$