**Exercice 1 : (2014 S1)** (3pts)

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ les points A(0;3;1), B(-1;3;0) et C(0;5;0) et (S) la sphère d'équation: $x^2+y^2+z^2-4x-5=0$

1) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ et en déduire que A, B et C sont non alignés.

b) Montrer que : $2x-y-2z+5=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2) a) Montrer que (S) est de centre $\Omega(2\,;0\,;0)$ et de rayon 3

b) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

c) Déterminer le triplet de coordonnées du point de tangence H du plan (ABC) et de la sphère (S).

**Exercice 2 : (2014 S1)** (3pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2-Z\sqrt{2}+2=0$

2) Soit u le nombre complexe tel que: $u=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$

a) Montrer que le module de u est $\sqrt{2}$ que $\arg u\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

b) En utilisant la forme trigonométrique du nombre u montrer que $u^6$ est un nombre réel.

On considère, Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$ on considère les points A et B d'affixes respectives $a=4-4i\sqrt{3}$, $b=8$

4) Soient z l'affixe du point M du plan et z′ l'affixe du point M′ image du M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) exprimer z′ en fonction de z.

b) Vérifier que B est l'image de A par la rotation R et en déduire que le triangle OAB est équilatéral.

**Exercice 3 : (2014 S1)** (3pts)

On considère la suite $(U_n)$ définie par :

$$U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+7 \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0=13$$

1) Montrer que : $U_n<14 \qquad \forall n\in N$

2) Soit $(V_n)$ la suite définie par :

$$V_n=14-U_n \qquad \forall n\in N$$

a – Montrer que $(V_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et donner $V_n$ en fonction de n.

b – En déduire que : $U_n=14-\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \forall n\in N$

puis Calculer $\lim U_n$

c – Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $U_n>13{,}99$

**Exercice 3 : (2014 S1)** (3pts)

Un sac contient neuf jetons, indiscernables au toucher portant les chiffres suivants : 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1

1) On tire simultanément et au hasard deux jetons du sac

Soit l'événement : A ″ la somme des deux numéros portés par les deux jetons tirées est égal à 1 ″

Montrer que $P(A)=\frac{5}{9}$

2) On considère le jeu suivant : **Said** tire au hasard et en même temps deux jetons du sac et il est considéré gagnant s'il tire deux jetons portant chacun le chiffre 1

a) Montrer la probabilité de gain de Said est $\frac{1}{6}$

b) Said a jouer le jeu précédent trois fois de suite, et à chaque fois il remet les deux jetons tirés dans le sac **Quelle est la probabilité** pour que Said gagne exactement deux fois.

**Problème : (2014 S1)** (8pts)

**I)** On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par

$$g(x)=1-\frac{1}{x^2}+\ln x$$

1) Montrer que $g'(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x} \quad \forall\in\,]0;+\infty[$ et en déduire que g est croissante sur $]0;+\infty[$

c – Vérifier que g(1) = 0 puis en déduire que :

$g(x)\le 0 \quad \forall\in\,]0,1]$ et $g(x)\ge 0 \quad \forall\in[1;+\infty[$

**II)** On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\left(1+\ln x\right)^2+\frac{1}{x^2}$$

(**C**) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 1 cm)

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{x}=0$ (on peut poser $t=\sqrt{x}$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

c) Déterminer la branche infinie de (**C**) au voisinage de +∞

3) a - Montrer que: $f'(x)=\frac{2g(x)}{x} \quad \forall x\in\,]0;+\infty[$

puis en déduire que est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$

b - Dresser le tableau des variations de f sur $]0;+\infty[$, puis en déduire que $f(x)\ge 2 \quad \forall x\in\,]0;+\infty[$

4) Construire la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

**(On admet que la courbe (C) admet un point d'inflexion, qu'on ne demande pas de déterminer).**

5) On considère les intégrales I et J suivants: $\mathbf{I}=\int_1^{\mathbf{e}}(1+\ln\mathbf{x})\mathbf{dx}$ et $\mathbf{J}=\int_1^{\mathbf{e}}(1+\ln\mathbf{x})^2\mathbf{dx}$

a) Montrer que $\mathbf{H}:\mathbf{x}\to\mathbf{x}\ln\mathbf{x}$ est une fonction primitive de $\mathbf{h}:\mathbf{x}\to 1+\ln\mathbf{x}$ sur $]0;+\infty[$ puis en déduire que $\mathbf{I}=\mathbf{e}$.

b) En utilisant une intégration par parties, montrer $\mathbf{J}=2\mathbf{e}-1$

c) Calculer en $cm^2$ l'aire du domaine plan délimité par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et $\mathbf{x}=\mathbf{e}$