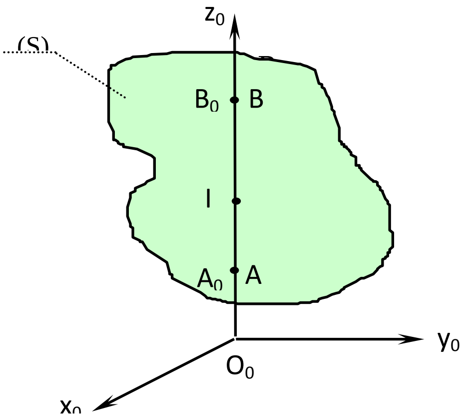
Professeur JAMIL RCHID wwwjjamrach@gmail.com

Rotation d'un solide autour d'un axe fixe.

I-Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe.

1)- Définition.

Un mobile est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, si
Les points du solide situés sur l'axe de rotation sont immobiles.
Et les autres points décrivent des cercles ou des arcs de cercle dans un plan perpendiculaire à l'axe et centrés sur l'axe.

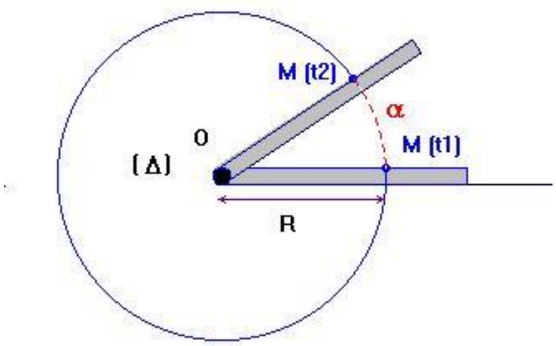


Remarques :
Les points du solide situés sur l'axe de rotation sont immobiles.
Les autres points décrivent des arcs de cercle ou des cercles centrés sur l'axe de rotation.
Pendant la durée Δt, tous les points du solide tourne du même angle α.

2-Etude du mouvement circulaire d'un point M :

2.1)-Paramétrage : repérage curviligne et angulaire :

Exemple : On considère le mouvement de rotation d'une porte autour de l'axe passant par ses gonds. On considère le mouvement d'un point M de la porte. La trajectoire du point M est un arc de cercle de rayon R. Le mouvement du point M est circulaire.



Entre deux instants t_1 et t_2, le point M parcourt comme distance l'arc de cercle : M1M2= S appelé abscisse curviligne noté S et exprimé en mètre m
Le point M décrit l'angle α appelé abscisse angulaire noté θ exprimé en rad .
Relation entre l'abscisse curviligne S et l'abscisse angulaire θ :

$$\boxed{S = R \cdot \theta}$$

2.2)- Vitesse angulaire moyenne :

On peut définir la vitesse angulaire moyenne que l'on note ω_m
Elle est égale au rapport entre l'angle de rotation α exprimé en rad et la durée du parcours Δt exprimée en seconde.

$\omega_m = \dfrac{\Delta\Theta}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta\Theta}{\Delta t}$	angle de rotation α exprimée en radian ; rad
	durée du parcours Δt exprimé en seconde : s
	Vitesse moyenne angulaire ω_m exprimée en rad / s

2.3)- Vitesse angulaire instantanée :

Vitesse angulaire instantanée : c'est la vitesse angulaire à un instant donné.
On l'évalue en calculant la vitesse angulaire moyenne pendant un intervalle de temps très court encadrant l'instant t considéré.
On note :

$$\omega(t) = \frac{\Delta\Theta}{t_2 - t_1} \quad \text{avec} \quad t_1 < t < t_2$$

En general :

$$\omega_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{\delta\theta}{\delta t}$$

2.4)- Relation entre vitesse d'un point et vitesse angulaire.

Pendant la durée $\Delta t = t_2 - t_1$, très courte ou non, le point M parcourt la distance

$$\boxed{d = \overset{\frown}{M_1M_2}}$$

et balaie l'angle α.

La vitesse du point mobile (vitesse linéaire) : $\boxed{v = \dfrac{\overset{\frown}{M_1M_2}}{t_2 - t_1}}$ **avec**

$\boxed{d = \overset{\frown}{M_1M_2} = R \cdot \alpha}$ **ou** $\boxed{S = R.\Theta}$

On tire :

$$v = \frac{R.\Theta}{t_2 - t_1} = R \cdot \frac{\Theta}{\Delta t}$$

$$\boxed{v = R.\omega}$$

Cette relation est valable pour les vitesses instantanées :

$v(t) = R.\omega(t)$	Vitesse angulaire ω exprimée en rad / s
	Rayon du cercle R en m
	Vitesse du point mobile v exprimée en m / s

Remarque : tous les points du solide ont à chaque instant la même vitesse de rotation, mais ils n'ont pas généralement la même vitesse instantanée.

3)- Le mouvement de rotation uniforme.

Un solide est en mouvement de rotation uniforme si sa vitesse angulaire est constante au cours du temps : $\omega_m = \omega(t) = \omega$

Remarques :

Pour un solide qui effectue un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe Δ,

Tous les points du solide ont la même vitesse angulaire ω.

En revanche, tous les points du solide n'ont pas la même vitesse linéaire. Si on prend deux points A et B du solide tels que :

- $$R_A \neq R_B \Rightarrow \begin{cases} v_A = \omega \cdot R_A \\ v_B = \omega \cdot R_B \end{cases} \Rightarrow v_A \neq v_B$$

Exemple : La Terre est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des pôles. Ce mouvement est périodique.

3.1)-La periode :

La durée pour effectuer un tour est appelée période, que l'on note T ;exprimé en seconde s

Pour la Terre, T = 86164 s : période de rotation autour de l'axe des pôles dans le référentiel géocentrique.

En un tour, la distance parcourue par un point à la surface de la Terre, situé à l'équateur

$$d = 2\,\pi \,.\, R$$

La vitesse d'un point à la surface de la Terre situé à l'équateur :

$$v_E = \frac{d}{T} = \frac{2\,.\,\pi\,.\,R}{T}$$

3.2)-La fréquence :

La fréquence **f** est le nombre de tours par seconde ; exprimé en hertz Hz

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

la vitesse v du point mobile en fonction du rayon de la trajectoire R et de la période T.

$$\boxed{v = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T} \Rightarrow v = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot f}$$

3.3)-Equations horaire du mouvement :

Considérons un point matériel M ayant un mouvement circulaire Uniforme de centre O (0.0) de rayon R et de vitesse V.
Le point M a une vitesse angulaire ω constante.

$$\Delta\Theta = \omega.\Delta t$$

$$\Theta - \Theta_0 = \omega.(t - t_0)$$

on peut donc en déduire l'expression de l'angle formé par le vecteur OM et l'axe Ox en fonction du temps :

$$\boxed{\theta\ (t) = \omega.t + \theta_0}$$

Où Θ_0 est l'angle initial (t_0=0)

$$S\ (t) = R.\Theta(t) \quad \text{et} \quad S_0 = R.\Theta_0 \quad \text{et } V = R.\omega$$
$$S(t) = R.(\ \omega.t + \theta_0\ ) = R\ .\omega.t + R.\Theta_0$$

$$\boxed{S(t) = V.t + S_0}$$