

8

Équations, inéquations et systèmes



1) Équations du premier degré à une inconnue

Activité 1

Résoudre dans \mathbb{R} les équations : $2x-5=0$; $3x-7=5x+8$; $5(x+2)-2x=3x+10$; $3x-1=3(x+1)$

Définition 1 :

Toute équation qui se ramène à l'équation de la forme $ax+b=0$ est appelée **équation du premier degré à une inconnue** où x est l'inconnue, a et b sont deux réels donnés.

Propriété 1 :

On considère l'équation (E) : $ax+b=0$ d'inconnue x et soit S l'ensemble de solutions de (E) dans \mathbb{R}

- Si $a \neq 0$, alors l'équation (E) admet une unique solution $x = -\frac{b}{a}$ et $S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$
- Si $a = 0$ et $b = 0$, alors tous les nombres réels sont des solutions de l'équation (E) et $S = \mathbb{R}$
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors l'équation n'admet aucune solution et $S = \emptyset$

Exercice : Exercice 1 de la série 8.

2) Inéquations du premier degré à une inconnue

Activité 2

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

$$-2x+6 \leq 0 \quad ; \quad 3x-4 < -5x+8 \quad ; \quad 5x-2(x+1) \geq 3x+1 \quad ; \quad 4x+5 \geq 7x+1-3x$$

Définition 2 :

Toute inéquation qui se ramène à l'inéquation de la forme $ax+b \geq 0$ ou $ax+b > 0$ ou $ax+b \leq 0$ ou $ax+b < 0$, s'appelle **inéquation du premier degré à une inconnue** où x est l'inconnue, a et b sont deux réels donnés.

Exercice : Exercice 2 de la série 8.

3) Signe du binôme $ax + b$

Introduction

Soient a et b deux réels tel que $a \neq 0$.

- On a $ax+b=0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$
- Si $a > 0$, alors $\begin{cases} ax+b > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a} \\ ax+b < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a} \end{cases}$

On résume les signes précédents de $ax+b$ dans un tableau appelé **tableau de signe** il s'écrit sous la forme :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	—	⊙	+

- Si $a < 0$, alors $\begin{cases} ax+b > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a} \\ ax+b < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a} \end{cases}$

Donc le tableau de signe s'écrit :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	+	⊙	—



Propriété 2 :

Soient a et b deux réels tel que $a \neq 0$.

Le tableau de signe du binôme $ax+b$ sur \mathbb{R} est le suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	Signe de $-a$		Signe de a

Exemple 1 :

Dressons le tableau de signe de $-3x+6$ et déduisons les solutions dans \mathbb{R} des inéquations $-3x+6 \geq 0$ et $-3x+6 \leq 0$

- On a $-3x+6=0 \Leftrightarrow x=2$, d'où le tableau de signe de $-3x+6$ s'écrit :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-3x+6$	— —		—

- Donc l'ensemble de solutions dans \mathbb{R} de l'inéquation $-3x+6 \geq 0$ est : $S_1 =]-\infty; 2]$

- Donc l'ensemble de solutions dans \mathbb{R} de l'inéquation $-3x+6 \leq 0$ est : $S_2 = [2; +\infty[$

Exemple 2 :

1) Dresser le tableau de signe de $5x+15$, $-x+1$ et $(5x+15)(-x+1)$

2) En déduire les solutions dans \mathbb{R} de l'inéquation $(5x+15)(-x+1) < 0$

Remarques 1 :

Soient x et y deux réels tel que $y \neq 0$

- 1) Le signe de $\frac{1}{y}$ est le signe de y . ; 2) Le signe de $\frac{x}{y}$ est le signe de $x \times y$.

Exemple 3 :

1) Dresser le tableau de signe de $5x-10$, $-4x+2$ et $\frac{5x-10}{-4x+2}$

2) En déduire les solutions dans \mathbb{R} de l'inéquation $\frac{5x-10}{-4x+2} \geq 0$

Exercice : Exercice 3 de la série 8.

4) Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues

Activité 3

1) En utilisant la méthode de substitution ou la méthode des combinaisons linéaires résoudre dans \mathbb{R}^2 les systèmes :

$$(S_1) \begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y=3 \end{cases} ; (S_2) \begin{cases} 4x-5y=2 \\ -x+3y=3 \end{cases} ; (S_3) \begin{cases} 3x+2y=41 \\ 4x-15y=239 \end{cases}$$

2) En utilisant la méthode graphique résoudre dans \mathbb{R}^2 le système : $(S_4) \begin{cases} -x+3y=1 \\ 2x-6y=-3 \end{cases}$

Définition 3 et propriété 3 :

- Toute système qui se ramène au système de la forme $(S) \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ s'appelle **système de deux**

équations du premier degré à deux inconnues où $(x;y)$ est l'inconnue, a, a', b, b', c et c' sont des réels donnés.

- Le nombre $ab'-a'b$ s'appelle **déterminant** du système (S) , noté D et s'écrit $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab'-a'b$

- Si $D \neq 0$ alors le système (S) est appelé **système de Cramer** et admet une unique solution $(x;y)$ dans \mathbb{R}^2 tel que :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D} ; y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{D}$$

- Si $D=0$, alors le système (S) admet une infinité de solutions ou n'admet aucune solution.



Exemple 4 :

1) En utilisant la méthode des déterminants résoudre dans \mathbb{R}^2 les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} 2x - 6y = 1 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases} ; \quad (S_2) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -4x + 6y = 5 \end{cases} ; \quad (S_3) \begin{cases} x + 2y = 17 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$$

2) En déduire la solution du système : $(S_4) \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17 \\ 2x^2 - 4y^2 = 2 \end{cases}$

Exercice : Exercice 4 de la série 8.

5) Inéquations et systèmes d'inéquations du premier degré à deux inconnues

Définition 4 :

Toute inéquation qui se ramène à l'inéquation de la forme $ax + by + c \geq 0$ ou $ax + by + c > 0$ ou $ax + by + c \leq 0$ ou $ax + by + c < 0$, s'appelle **inéquation du premier degré à deux inconnues** où $(x; y)$ est l'inconnue, a et b sont deux réels donnés.

Propriété 4 : Régionement du plan

Soit (D) une droite d'équation $(D): ax + by + c = 0$ dans un plan rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

La droite (D) partage le plan (P) en deux demi-plans (D^+) et (D^-) tels que :

(D^+) est l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tel que $ax + by + c > 0$

(D^-) est l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tel que $ax + by + c < 0$

Remarque 2

Pour résoudre graphiquement l'inéquation (D^+) ou (D^-) , on procède de la façon suivante :

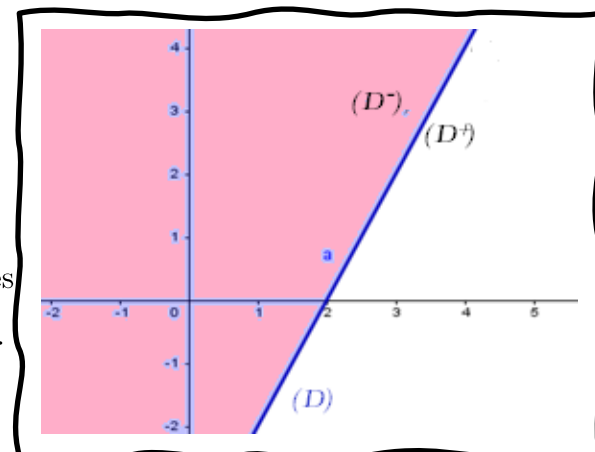
- On trace la droite (D) ;
- On choisit un point en dehors de la droite (D) et on teste s'il appartient au demi-plan cherché ou non. (Le plus souvent, quand la droite ne passe pas par l'origine, on choisit $O(0, 0)$ qui fournit le résultat facilement, mais si la droite passe par l'origine du repère on choisit un autre point).
- On colorier le demi-plan cherché (à partir de l'inéquation demandée).
- Les solutions graphiques de l'inéquation (D^+) ou (D^-) sont les couples $(x; y)$ de coordonnées des points situés dans la partie colorée.

Exemple 5 :

Résolvons graphiquement dans \mathbb{R}^2 l'inéquation $2x - y - 4 < 0$

C'est-à-dire déterminons le demi-plan (D^-) tel que (D) la droite d'équation $(D): 2x - y - 4 = 0$

- On trace la droite (D) (il suffit de trouver deux points appartenant à (D))
- On a $O(0; 0) \notin (D)$ et puisque $2x_0 - y_0 - 4 = 2 \times 0 - 0 - 4 = -4 < 0$
Alors : $O(0; 0) \in (D^-)$
- Donc les solutions graphiques de l'inéquation $2x - y - 4 < 0$ sont les couples $(x; y)$ de coordonnées des points situés dans la partie colorée.



Exemple 6 :

- 1) Représenter dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ les droites $(D): 3x - 2y - 6 = 0$ et $(D'): 2x + 3y = 0$.
- 2) Résoudre graphiquement dans \mathbb{R}^2 les inéquations $3x - 2y - 6 \leq 0$ et $2x + 3y > 0$
- 3) En déduire les solutions graphiques dans \mathbb{R}^2 du système
$$\begin{cases} 3x - 2y - 6 \leq 0 \\ 2x + 3y > 0 \end{cases}$$

Exercice : Exercice 5 de la série 8.

6) Équations du second degré à une inconnue

Propriété 5 et définition 5 : Forme canonique d'un trinôme

Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$.

Pour tout x de \mathbb{R} , on a :
$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2} \right]$$

Cette écriture s'appelle **forme canonique** du trinôme $ax^2 + bx + c$

Définition 6 :

- Toute équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$, s'appelle **équation du second degré à une inconnue x** .
- Les nombres réels a, b , et c s'appellent coefficients.
- Le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$ s'appelle le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$ et de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Propriété 6 :

On considère l'équation $(E): ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant et soit S l'ensemble de solutions de (E) dans \mathbb{R}

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation (E) n'admet aucune solution et on a $S = \emptyset$
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation (E) admet une solution unique (dite solution double) : $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et on a $S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$
- Si $\Delta > 0$ alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et on a $S = \{x_1; x_2\}$

Exemple 7

- 1) a) Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes : $3x^2 + 2x + 1 = 0$; $4x^2 + 12x + 9 = 0$; $x^2 - 3x + 2 = 0$
 b) En déduire les solutions des équations suivantes : $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$; $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$
- 2) Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes : $x^2 - 5x = 0$; $4x^2 - 25 = 0$; $x^2 + 1 = 0$; $x^2 - 2x + 1 = 0$

Remarques 3

- Si $ac < 0$ alors $\Delta > 0$ et l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes.
- Les équations de la forme : $ax^2 + bx = 0$; $ax^2 + c = 0$; $a^2x^2 \pm 2abx + b^2 = 0$ peuvent être résolues directement sans passer par le discriminant Δ .

Activité 4 : Soient u et v deux réels

- 1) Vérifier que $x^2 - (u+v)x + uv = (x-u)(x-v)$
- 2) En déduire les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $x^2 - (u+v)x + uv = 0$

Propriété 7 : Soient u et v deux réels

L'équation $x^2 - (u+v)x + uv = 0$ admet deux solutions dans \mathbb{R} sont u et v

Exemple 8

Sans calculer le discriminant Δ résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$x^2 - (3+4)x + 4 \times 3 = 0 ; x^2 - 9x + 8 = 0 ; x^2 - 3x - 10 = 0 ; x^2 - 10x + 25 = 0; x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$$

Exercice : Exercice 6 de la série 8.



7) Somme et produit des deux solutions d'une équation du second degré

Activité 5 :

On considère dans \mathbb{R} l'équation (E): $ax^2 + bx + c = 0$ tel que $a \neq 0$.

On suppose que (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 .

- 1) Calculer la somme $x_1 + x_2$ en fonction de a et b .
- 2) Calculer le produit $x_1 \times x_2$ en fonction de a et c .

Propriété 8 :

Si x_1 et x_2 sont les solutions distinctes de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ alors : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

Exemple 9

On considère dans \mathbb{R} l'équation (E): $2x^2 - x - 3 = 0$

- 1) Montrer que l'équation (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 (sans les calculer).
- 2) Calculer $x_1 + x_2$, $x_1 \times x_2$, $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$, $x_1^2 + x_2^2$ et $x_1^3 + x_2^3$.
- 3) Sachant que -1 est une solution de l'équation (E), déterminer l'autre solution.

Exercice : Exercice 7 de la série 8.

8) Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$

Propriété 9 :

Soit Δ le discriminant du trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$

- Si $\Delta > 0$, alors le trinôme $P(x)$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2 et on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Si $\Delta = 0$, alors le trinôme $P(x)$ admet une seule racine $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$
- Si $\Delta < 0$, alors le trinôme $P(x)$ n'admet pas de racine dans \mathbb{R} et ne peut être factorisé en produit de deux binômes.

Exemple 10

Factoriser si c'est possible le trinôme $P(x)$ en produit de deux binômes dans les cas suivants :

$$P(x) = 2x^2 - x - 1 \quad ; \quad P(x) = -4x^2 + 4\sqrt{3}x - 3 \quad ; \quad P(x) = x^2 + x + 1$$

Exemple 11

- 1) Factoriser le polynôme $x^2 - 6x + 8$ et déduire une factorisation du polynôme $x^4 - 6x^2 + 8$.
- 2) Factoriser le polynôme $x^2 - 3x - 10$ et déduire une factorisation du polynôme $x^4 - 3x^2 - 10$.
- 3) Factoriser le polynôme $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$ sachant qu'il admet 2 comme racine.
- 4) Factoriser le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 - 2$

Exercice : Exercice 8 de la série 8.

9) Inéquations du second degré à une inconnue

Activité 6 : On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$ et soit Δ son discriminant.

- 1) On suppose que x_1 et x_2 sont deux solutions distinctes de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et que $x_2 < x_1$

Compléter le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x_2	x_1	$+\infty$
$x - x_1$			○	
$x - x_2$		○		
$a(x - x_1)(x - x_2)$ (si $a > 0$)		○	○	
$a(x - x_1)(x - x_2)$ (si $a < 0$)		○	○	



2) Si $\Delta = 0$, déterminer le signe de $ax^2 + bx + c$ (on pourra utiliser la factorisation $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$)

3) Si $\Delta < 0$, montrer que le signe de $ax^2 + bx + c$ est le signe a de (on pourra utiliser la forme canonique)

Propriété 10 : Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$

Soit le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ et Δ son discriminant.

1) Si $\Delta < 0$, alors $P(x)$ est de signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	

2) Si $\Delta = 0$, alors $P(x)$ est de même signe que a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $P\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	○	Signe de a

3) Si $\Delta > 0$ et x_1, x_2 les deux racines de $P(x)$ avec $x_2 < x_1$, alors :

- $P(x)$ est du signe de $-a$ pour tout $x \in]x_2; x_1[$
- $P(x)$ est du signe de a pour tout $x \in]-\infty; x_2[\cup]x_1; +\infty[$

x	$-\infty$	x_2	x_1	$+\infty$	
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	○	Signe de $-a$	○	Signe de a



Exemple 12

Etudier le signe des trinômes suivantes : $P(x) = -3x^2 + x - 2$; $Q(x) = 2x^2 - x - 1$; $R(x) = 16x^2 - 8\sqrt{3}x + 3$

Exemple 13

Dresser le tableau de signe des expressions suivantes :

$$G(x) = \frac{1}{x^2 - 7x + 12} \quad ; \quad H(x) = \frac{-2x^2 + 5x - 3}{3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2} \quad ; \quad K(x) = \frac{x^2 - 8x + 9}{x(x - 4)}$$

Définition 7 :

Toute inéquation de la forme $ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$, s'appelle **inéquation du second degré à une inconnue** avec a, b et c sont des réels donnés, $a \neq 0$ et x est l'inconnue.

Remarque 4

Pour résoudre une inéquation du second degré à une inconnue on utilise souvent le tableau de signe.

Exemple 14

Résolvons dans \mathbb{R} les inéquations : $x^2 - 7x + 12 \geq 0$ ou $x^2 - 7x + 12 > 0$ ou $x^2 - 7x + 12 \leq 0$ ou $x^2 - 7x + 12 < 0$,

- Dressons premièrement le tableau de signe du trinôme $x^2 - 7x + 12$

On a (Facile à vérifier) :

x	$-\infty$	3	4	$+\infty$	
$x^2 - 7x + 12$	+	○	-	○	+

• Donc l'ensemble de solutions de l'inéquation $x^2 - 7x + 12 \geq 0$ est : $S_1 = \dots\dots\dots$

• Donc l'ensemble de solutions de l'inéquation $x^2 - 7x + 12 > 0$ est : $S_2 = \dots\dots\dots$

• Donc l'ensemble de solutions de l'inéquation $x^2 - 7x + 12 \leq 0$ est : $S_3 = \dots\dots\dots$

• Donc l'ensemble de solutions de l'inéquation $x^2 - 7x + 12 < 0$ est : $S_4 = \dots\dots\dots$

Exercice : Exercice 9 de la série 8.

Remarque 4 : Ensemble de définition d'une équation/inéquation : Voir l'exercice 10 de la série 8.

Complément de cours : Détermination de deux nombres dont la somme et le produit sont connues : Voir l'exercice 11 de la série 8.

Résumé 8 : Équations, inéquations et systèmes

Équations du premier degré à une inconnue

On considère l'équation (E): $ax+b=0$ d'inconnue x et soit S l'ensemble de solutions de (E) dans \mathbb{R}

- Si $a \neq 0$, alors $S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$
- Si $a = 0$ et $b = 0$, alors (E) et $S = \mathbb{R}$
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $S = \emptyset$

Inéquations du premier degré à une inconnue

Pour résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue on utilise souvent le tableau de signe du binôme $ax+b$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	Signe de $-a$		Signe de a

Systèmes de deux équations du premier degré

$$(S) \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

- Le nombre $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ s'appelle **déterminant** du

système (S),

- Si $D \neq 0$ alors le système (S) admet une unique solution $(x;y)$ dans \mathbb{R}^2 tel que :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D} ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{D}$$

- Si $D = 0$, alors le système (S) admet une infinité de solutions ou n'admet aucune solution.

Inéquations du premier degré à deux inconnues

Pour résoudre graphiquement l'inéquation

$$(D^+): ax+by+c > 0 \text{ ou } (D^-): ax+by+c < 0 :$$

- On trace la droite (D): $ax+by+c=0$ dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- On choisit un point en dehors de la droite (D) et on teste s'il appartient au demi-plan cherché ou non.
- On colorier le demi-plan cherché (à partir de l'inéquation demandée).
- Les solutions graphiques de l'inéquation (D^+) ou (D^-) sont les couples $(x;y)$ de coordonnées des points situés dans la partie colorée.

Remarques :

- Si $ac < 0$ alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions distinctes.
- Les équations : $ax^2+bx=0$; $ax^2+c=0$; $a^2x^2 \pm 2abx + b^2 = 0$; $x^2 - (u+v)x + uv = 0$ peuvent être résolues sans Δ .

Équations et inéquations du second degré

- **Discriminant** du trinôme ax^2+bx+c et de l'équation $ax^2+bx+c=0$ est $\Delta = b^2 - 4ac$

- **Forme canonique** $ax^2+bx+c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2} \right]$

	$\Delta < 0$	$S = \emptyset$					
			Ne peut pas être factorisé en produit de deux binômes.				
	$\Delta = 0$	$S = \left\{ x_0 = -\frac{b}{2a} \right\}$	$ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$				
	$\Delta > 0$	$S = \left\{ x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$	$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$				
Les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $ax^2+bx+c=0$							
Factorisation du trinôme ax^2+bx+c							
Signe du trinôme ax^2+bx+c							
Somme et produit des solutions							

Pour résoudre une inéquation du second degré à une inconnue on utilise souvent le tableau de signe du trinôme ax^2+bx+c

Exercice 1 : Équations du premier degré à une inconnue

1) Résoudre dans \mathbb{R} les équations :

$$3x+6=0 ; 1+2x=\sqrt{2}(3-x) ; \frac{3x-2}{3}-\frac{x-1}{4}=x-7$$

$$(3x+5)^2=(x+1)^2 ; 4x^2=100 ; 2x^2-7x=0$$

$$\frac{3x+2}{5}-3=\frac{-1+2x}{2} ; \frac{4}{x-3}-\frac{5}{x+1}=0 ; \frac{x-3}{9x+6}=1$$

$$\frac{5x+7}{x+1}=\frac{5x-7}{x-1} ; \frac{2x+3}{x-2}=0 ; 2x(x-1)=(x+3)(x-1)$$

$$4(x+3)^2=x^2-9 ; 2x^2-x+1=x+1 ; |x|=5$$

$$|2x-3|=13 ; |x+2|=|x| ; |1-x|=|2x+3|$$

$$|x-1|+|x+1|+|x|=2 ; 2|x+1|-3|2x-1|=5$$

2) Discuter selon les valeurs du paramètre réel m les solutions dans \mathbb{R} des équations suivantes :

a) $(m-1)x=2m-1$

b) $(2-m)x+3mx+2(m-x)-6=0$

c) $(3m+5)x+3m=(2m-5)x+m+1$

Exercice 2 : Inéquations du premier degré à une inconnue

1) Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations :

$$2x-6 \geq 0 ; -x+5 \leq -2x+3 ; \frac{5x+1}{6} > \frac{3x-3}{8}$$

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+3}{3} \geq 2-3x ; \frac{3x-2}{3} - \frac{x}{2} \geq \frac{1-2x}{2} - 1$$

$$|x| \leq 3 ; |2x-1| < \frac{3}{2} ; |3x+1| \geq 5 ; \sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2} > 0$$

$$|x-1|-3|x-2| \leq 2x-3 ; |x-1|+|3-x| < 6$$

2) Discuter selon les valeurs du paramètre réel m les solutions dans \mathbb{R} des inéquations suivantes :

a) $(m^2-4)x \leq m+2$

b) $(m+2)x-2 \geq 3m$

c) $(3-m)x-m^2+2m \geq 0$

Exercice 3 : Signe du binôme $ax+b$

1) Dresser le tableau de signe de :

$$-4x+8, \frac{1}{6x+2} \text{ et } \frac{-4x+8}{6x+2}$$

2) Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations :

$$(x+1)(-2x+3) \leq 0 ; (2x-3)(4x-5) \geq 0$$

$$\frac{x-3}{x+1} > 0 ; \frac{(3x+2)(4x-1)}{5x-2} \geq 0$$

$$3x^2-2x \leq 0 ; (2x-1)(1-3x)(x-\sqrt{2})^2 \geq 0$$

$$\frac{x}{x-1} \leq 0 ; (x+1)(4x^2-9) \geq 0$$

$$\frac{(2x+1)^2-x^2}{x-1} \geq 0 ; x^2 \geq 16$$

$$\frac{2}{x-3} \leq 1 ; \frac{1}{1-3x} \leq \frac{2}{x-4} ; \frac{2x}{3x+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{2x+1}{x} \leq \frac{1}{3} ; 5x + \frac{1}{x} < \frac{1}{x} + \frac{2}{x}$$

Exercice 4 : Systèmes de deux équations du premier degré

A) En utilisant la méthode des déterminants résoudre dans \mathbb{R}^2 les systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} 5x-2y=4 \\ -3x+4y=6 \end{cases} ; 2) \begin{cases} 10x+y=7 \\ 100x+y=1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x+4y=1 \\ x-2y=2 \end{cases} ; 4) \begin{cases} 3x-2y=6 \\ \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=0 \end{cases}$$

B) 1) Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système (S_1) : $\begin{cases} 3x+2y=4 \\ -x+y=-3 \end{cases}$

2) En déduire la solution du système (S_2) : $\begin{cases} 3|x|-2|y-1|=4 \\ -|x|-|y-1|=-3 \end{cases}$

C) Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système (S) : $\begin{cases} 2\sqrt{x-1}-\sqrt{y+2}=7 \\ -\sqrt{x-1}+2\sqrt{y+2}=-17 \end{cases}$

D) 1) Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x+y=5 \end{cases}$

2) En déduire les solutions des systèmes :

$$\begin{cases} 2|x|+|y|=1 \\ 3|x|+|y|=5 \end{cases} ; \begin{cases} 2\sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \\ 3\sqrt{x}+\sqrt{y}=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 5 \end{cases} ; \begin{cases} 2x^2+y^2=1 \\ 3x^2+y^2=5 \end{cases}$$



E) On considère le système (S_m) : $\begin{cases} (m-1)x+y=m+1 \\ x+(m-1)y=3 \end{cases}$

1) Montrer que le déterminant de (S_m) est $D=m(m-2)$

2) Discuter selon les valeurs du paramètre réel m les solutions dans \mathbb{R}^2 du système (S_m)

Exercice 5 : Inéquations du premier degré à deux inconnues

1) Résoudre graphiquement dans \mathbb{R}^2 les inéquations $2x-y-5 \leq 0 ; x-2y \geq 0 ; x+y-3 < 0 ; 4x-3y+7 > 0$

2) Résoudre graphiquement dans \mathbb{R}^2 les systèmes :

$$(S_1) \begin{cases} 2x-y-3 \leq 0 \\ x-2y+1 \geq 0 \end{cases} ; (S_2) \begin{cases} x-2y \leq 7 \\ x+y \leq 3 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ y+1 \leq 0 \end{cases} ; (S_4) \begin{cases} y-x-1 \leq 0 \\ y+2x-2 \leq 0 \\ 2y+x+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$(S_5) \begin{cases} 4x-3y-8 \leq 0 \\ 2x+5y+3 \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} ; (S_6) \begin{cases} x+y+3 < 0 \\ -2x+y+2 > 0 \\ -2x+3y+2 < 0 \end{cases}$$

$$(S_7) \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 4 \end{cases}$$

3) Résoudre graphiquement dans \mathbb{R}^2 l'inéquation $(2x-y+1)(x-y-3) \leq 0$

Exercice 6 : Équations du second degré à une inconnue

A) Résoudre dans \mathbb{R} les équations :

- 1) $2x^2 + x - 1 = 0$
- 2) $x^2 - 8x + 16 = 0$
- 3) $-2x^2 + 2\sqrt{2}x - 1 = 0$
- 4) $x^2 - 2|x| - 3 = 0$
- 5) $x^4 - 4\sqrt{2}x^2 + 6 = 0$
- 6) $3x^4 - 4\sqrt{3}x^2 + 4 = 0$
- 7) $-3x + 5\sqrt{x} - 4 = 0$
- 8) $\sqrt{x^2 + 3} = 2x - 1$
- 9) $\sqrt{x^2 - 1} = x + 1$

B) Sans calculer le discriminant Δ résoudre dans \mathbb{R} les équations :

- 1) $3x^2 - 2x = 0$
- 2) $7x^2 - 3 = 0$
- 3) $x^2 - 10x + 16 = 0$
- 4) $x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{5})x + \sqrt{15} = 0$
- 5) $x^2 - 4\sqrt{3}x + 9 = 0$

C) On considère l'équation :

(E): $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$

- 1) Montrer que 0 n'est pas une racine de (E)
- 2) On pose $t = x + \frac{1}{x}$, montrer que $t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow (E)$
- 3) Résoudre l'équation $t^2 - 5t + 6 = 0$ et déduire les solutions de l'équation (E)

Exercice 7 : Somme et produit des solutions

A) On considère l'équation (E): $-2x^2 + \sqrt{2}x + 2 = 0$ 1) Montrer que l'équation (E) admet deux solutions distinctes α et β (sans les calculer).2) Calculer $\alpha + \beta$, $\alpha \times \beta$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$, $\alpha^2 \beta + \alpha \beta^2$,

$$\alpha^2 + \beta^2, \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \text{ et } \alpha^3 + \beta^3.$$

B) Montrer que l'équation (E'): $x^2 - 3x + 1 = 0$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 puis calculer

$$\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}}$$

Exercice 8 : Factorisation d'un trinôme

Factoriser si c'est possible les trinômes suivants :

$$P_1(x) = 2x^2 + 3x - 2 ; P_2(x) = -3x^2 + 7x - 2$$

$$P_3(x) = 25x^2 - 10x + 1 ; P_4(x) = 3x^2 + 6\sqrt{3}x + 9$$

$$P_5(x) = -3x^2 + x - 2 ; P_6(x) = -3x^4 + x^2 - 2$$

Exercice 9 : Inéquations du second degré à une inconnue

A) Etudier le signe du trinôme $P(x)$:

- 1) $P(x) = x^2 - 7x + 12$
- 2) $P(x) = -x^2 + 6x - 9$
- 3) $P(x) = -x^2 + 2x - 3$
- 4) $P(x) = 7x^2 + 12x + 5$
- 5) $P(x) = x^2 + x + 1$

B) Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations :

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0 ; x^2 - 8x + 5 < 0 ; 49x^2 - 70x + 25 > 0 ;$$

$$-x^2 + x + 3 < 0 ; -9x^2 + 6\sqrt{2}x - 2 > 0 ;$$

$$\sqrt{2}x^2 + 4x + \frac{1}{\sqrt{2}} \leq 0 ; 3,5x^2 - 0,5x + 0,15 \leq 0 ;$$

$$\frac{-2x^2 + x + 1}{x^2 - 4x - 5} \geq 0 ; \frac{x^2 - 6x + 9}{3x^2 + 10x - 8} \geq 0 ; 4x - 3\sqrt{x} + 1 < 0$$

$$\frac{x^2 - 8x + 9}{x^2 - 4x} < 0 ; \frac{x^3 - 8}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} \geq 0$$

$$\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x^2+x} \leq \frac{3(x+3)}{x} ; \sqrt{x^2+3x+4} \leq \frac{1}{2}x + 2$$

Exercice 10

1) On considère dans \mathbb{R} l'équation (E): $\sqrt{x^2 - 7x + 12} = x$ a) Déterminer D l'ensemble des réel x pour lesquels l'équation (E) est bien définie (a un sens).b) Résoudre dans D l'équation (E) (étudier les cas : $x \geq 0$ et $x < 0$)2) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\sqrt{x^2 - 7x + 12} > x$

Exercice 11 : Complément de cours

Propriété 11

Soient u et v deux réels.Le système $\begin{cases} u + v = S \\ uv = P \end{cases}$ admet une solution $(u; v)$ dans \mathbb{R}^2 siet seulement si $S^2 - 4P \geq 0$ u et v dans ce cas sont les solutions de l'équation

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Exercice : Résoudre dans \mathbb{R}^2 les systèmes :

1) $\begin{cases} x + y = -9 \\ xy = 20 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 16 \\ xy = -1024 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 98 \\ xy = 15 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = -3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ xy = 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x + xy + y = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 13 \\ x + y = -2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 0 \\ x + y = -2 \end{cases}$