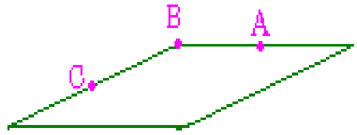
# 15

# Géométrie de l'espace

# 1- التقاطع و التوازي في الفضاء

## 1.1 المستوى

- ثلاث نقط غير مستقيمية $A$ و $B$ و $C$ تحدد مستوى نرمز له ب : $(ABC)$



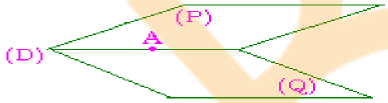

### خاصيات

1- مستقيمان متقاطعان قطعا يحددان كذلك مستوى

2- مستقيمان متوازيان قطعا يحددان مستوى

3- مستقيم و نقطة خارجه يحددان مستوى

4- إذا كان لمستويين مختلفين نقطة مشتركة فهما يتقاطعان في مستقيم يمر من هذه النقطة .




5- جميع خاصيات الهندسة المستوية تبقى صحيحة في كل مستوى من مستويات الفضاء.

## 2.1 الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفضاء

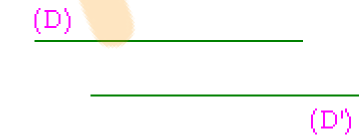
A. مستوائيان :

يوجدان ضمن نفس المستوى

فهما إما :

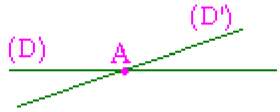
1- متوازيين :

أ- متوازيان قطعا



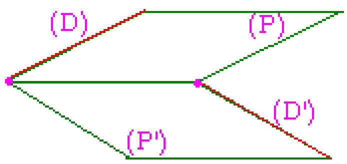

ب- منطبقان


2- متقاطعين :



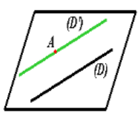

B. غير مستوائيان

إذا كانا مستقيمين غير متقاطعين وغير متوازيين نقول إنهما غير مستوائيين. (لا يوجدان ضمن نفس المستوى)

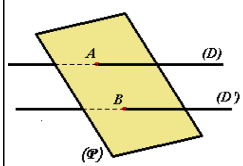



### خاصيات

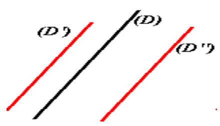
1. يوجد مستقيم وحيد يمر من نقطة معلومة ويوازي مستقيما معلوما



2. إذا قطع مستوى أحد مستقيمين متوازيين فانه يقطع الأخر.



3- إذا كان مستقيمان متوازيان في الفضاء فان كل مستقيم يوازي أحدهما يكون موازيا للأخر

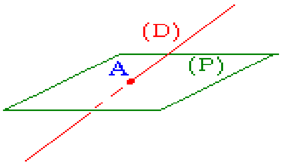


## 3.1 الأوضاع النسبية لمستقيم و مستوى في الفضاء

$(D)$ مستقيم ضمن الفضاء و $(P)$ مستوى ضمن الفضاء

1- المستقيم و المستوى يتقاطعان في نقطة

$(D)\cap(P)=\{A\}$

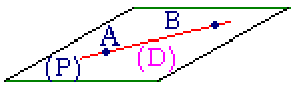



2- المستقيم و المستوى متوازيان $(D)\parallel(P)$

أ- منطبقان

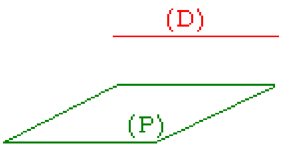
يعني المستقيم ضمن المستوى

$(D)\subset(P)$



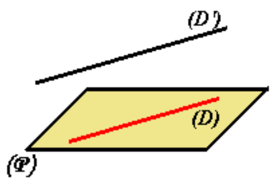

ب- متوازيان قطعا

$(D)\cap(P)=\varnothing$



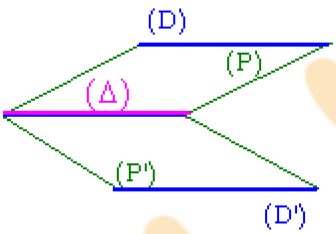

### خاصيات

1- يكون مستقيم موازيا لمستوى إذا وجد ضمن هذا المستوى مستقيم يوازيه .



2- إذا توازى مستويان في الفضاء فان كل مستقيم يوازي أحدهما يوازي الأخر

3- مبرهنة السقف: إذا اشتمل مستويان متقاطعان على مستقيمين متوازيين قطعا،فإن تقاطعهما هو مستقيم موازلهذين المستقيمين المتوازيين.




4- إذا كانت نقطتان من مستقيم تنتميان إلى مستوى فإن المستقيم المار منهما يوجد ضمن هذا المستوى

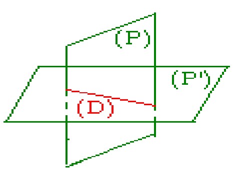
## 4.1 الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء

$(P)$ و $(P')$ مستويان في الفضاء

$(P)$ و $(P')$ يكونان إما :

1- متقاطعين في مستقيم

$(P)\cap(P')=(D)$

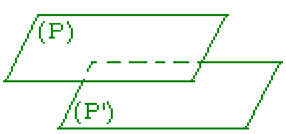



2- متوازيين $(P)\parallel(P')$

أ- منطبقين $(P)=(P')$

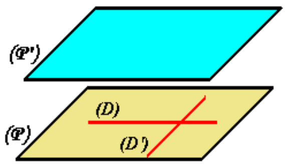

ب- متوازيان قطعا

$(P)\cap(P')=\varnothing$

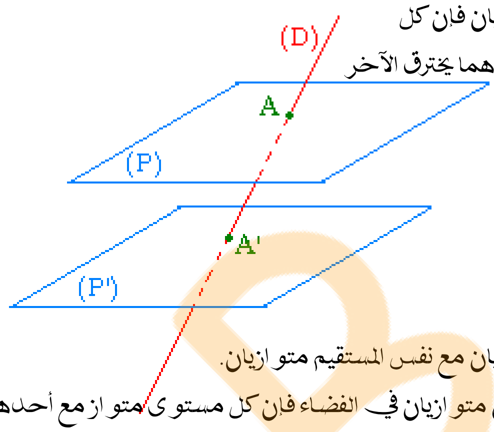


## خاصيات

1ـ يكون مستويان متوازيين إذا اشتمل أحدهما على مستقيمين متقاطعين و موازيين للمستوى الآخر




2ـ إذا توازى مستويان فإن كل مستقيم يخترق أحدهما يخترق الآخر




3ـ المستويان المتوازيان مع نفس المستقيم متوازيان.

4ـ إذا كان مستويان متوازيان في الفضاء فإن كل مستوى متواز مع أحدهما يكون موازيا للآخر.

## 2- التعامد في الفضاء

### 1.2 المستقيمات المتعامدة في الفضاء

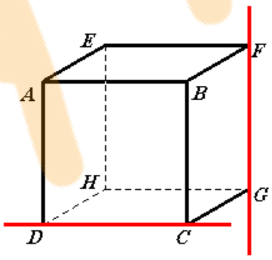
نقول إن مستقيمان متعامدين في الفضاء إذا وجد مستقيمان مستوائيان متعامدان موازيان لهما .

**مثال:** $ABCDEFGH$ مكعب،

نلاحظ أنّ: المستقيمين $(DC)$ و $(FG)$ متعامدان، لآن

$(DC)$ و $(BC)$ مستوائيان و متعامدان في النقطة $C$، و $(BC)$ و $(FG)$ متوازيان

و $(DC)$ يوازي نفسه.




## خاصيات

1ـ إذا كان مستقيمان متعامدين في الفضاء فإن كل مستقيم مواز لأحدهما يكون متعامدا مع الآخر.

2ـ إذا توازى مستقيمان في الفضاء فإن كل مستقيم متعامد مع أحدهما يكون عموديا مع الأخر.

**مثال :** $ABCDEFGH$ مكعب. بين أن : $(AE)\perp(DC)$ و $(BF)\perp(GH)$

### 2.2 تعامد مستقيم و مستوى في الفضاء

نقول إن مستقيم عمودي على مستوى في الفضاء إذا كان عموديا على جميع مستقيمات هذا المستوى.

## خاصيات

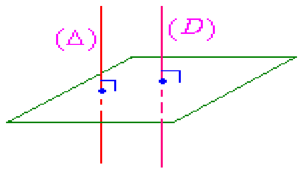
1ـ يكون مستقيم عموديا على مستوى في الفضاء إذا كان عموديا على مستقيمين متقاطعين ضمن هذا المستوى

**مثال :** $ABCDEFGH$ مكعب. بين أن : $(BF)\perp(ABC)$

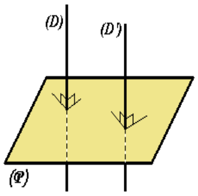
2ـ يكون مستقيمان متعامدان في الفضاء إذا كان أحدهما عمودي على مستوى يحتوي على الأخر.

**مثال :** $ABCDEFGH$ مكعب. بين أن : $(AE)\perp(DC)$ و $(BF)\perp(GH)$

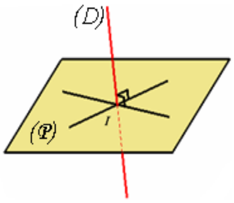
3ـ إذا توازى مستقيمان في الفضاء فإن كل مستوى عمودي على أحدهما يكون عموديا على الآخر.



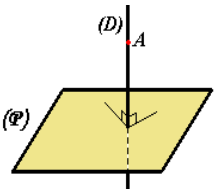

4ـ المستقيمان العموديان على نفس المستوى متوازيان



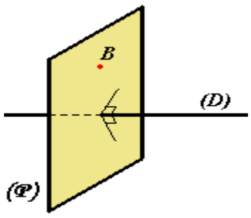

5ـ إذا كان مستقيم عموديا على مستقيمين متقاطعين من مستوى فانه عمودي على كل مستقيمات هذاالمستوى



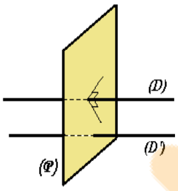

6ـ يوجد مستقيم وحيد يمر من نقطة معلومة ويعامد مستوى معلوم




7ـ يوجد مستوى وحيد يمر من نقطة معلومة ويعامد مستقيما معلوما

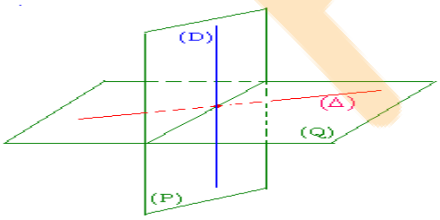



8ـ المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين عمودي على الآخر




### 3.2 تعامد وتوازي مستويين في الفضاء

نقول إن مستويان متعامدين في الفضاء إذا وجد ضمن أحدهما مستقيم عمودي على المستوى الآخر

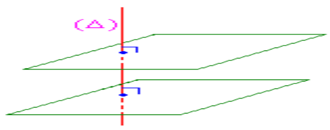


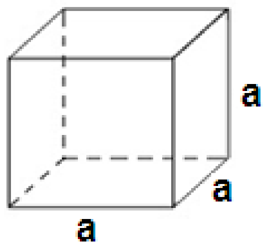
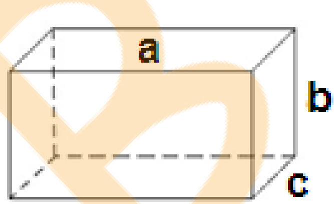
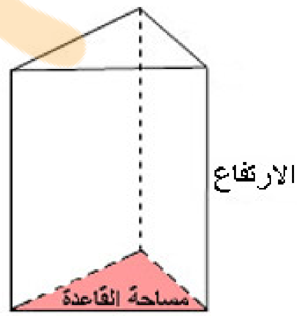
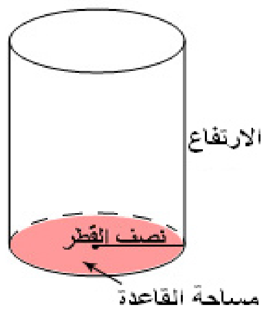
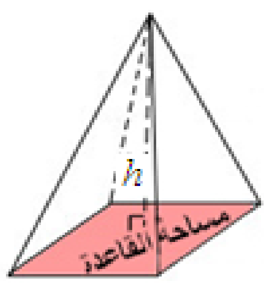

**مثال :** $ABCDEFGH$ مكعب. بين أن : $(ABG)\perp(DCD)$

## خاصيات

2ـ إذا كان مستويان متعامدين مع نفس المستقيم فإنهما يكونان متوازيان.

4ـ إذا توازى مستويان في الفضاء فإن كل مستقيم عمودي على أحدهما يكون عموديا على الآخر.



| المجســـــم | المساحة الجانبية | المساحة الكليـــــــــة | الحجـــــم |
|---|---|---|---|
| مكعب طول ضلعه a  | $S_L = 4a^2$ | $S_T = 6a^2$ | $V = a^3$ |
| متوازي مستطيلات أبعاده<br>a و b و c  | $S_L = 2(ac+bc)$<br>أو<br>$S_L = 2(ab+bc)$<br>أو<br>$S_L = 2(ac+ab)$ | $S_T = 2(ab+bc+ac)$ | $V = abc$ |
| موشور قائم إرتفاعه h  | $S_L = P_B \times h$<br>$P_B$ : محيـــط القاعدة<br>$S_L$ : المساحة الجانبية | $S_T = S_L + 2 \times S_B$<br>$S_B$ : مساحـــة القاعدة<br>$S_T$ : المساحة الكليـــة | $V = S_B \times h$ |
| أسطوانة قائمة<br>شعاعها R و ارتفاعها h  | $S_L = P_B \times h$<br>أي<br>$S_L = 2\pi R \times h$ | $S_T = S_L + 2 \times S_B$<br>أي<br>$S_T = 2\pi R(R+h)$ | $V = S_B \times h$<br>أي<br>$V = \pi R^2 \times h$ |
| هرم إرتفاعه h  | مجموع مساحات الأوجـــه الجانبية | $S_T = S_L + S_B$ | $V = \frac{1}{3} S_B \times h$ |
| | **ملاحظة هامة**<br>قاعدة الهرم يمكـــن أن تكون مربعا أو مستطيلا أو خماسيا أو دائرة .... | | |

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
أكاديمية جهة سوس ماسة – المديرية الاقليمية انزكان ايت ملول
ثانوية عبد الله الشفشاوني التأهيلية – تمسية

بسم الله الرحمن الرحيم

# سلسلة التمارين رقم 15

الهندسة الفضائية

**المستوى:** جذع مشترك علوم
**المادة:** الرياضيات
**الأستاذ:** عيسى هياب

## التمرين 1

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات، النقطتان $N$ و $M$ منتصفا القطعتين $[BF]$ و $[AB]$ على التوالي.

1- أنشئ الشكل

2- بين أن $(AB)\perp(CG)$ و $(MN)\parallel(AF)$ و $(MN)\parallel(DG)$

3- بين أن المستقيمين $(MN)$ و $(EF)$ متقاطعان.

4- بين أن المستقيمين $(MN)$ و $(FG)$ غير مستوائيان.

5- بين أن $(MN)\subset(AEF)$ و $(EM)\parallel(DCG)$ و $(EH)\perp(MBN)$

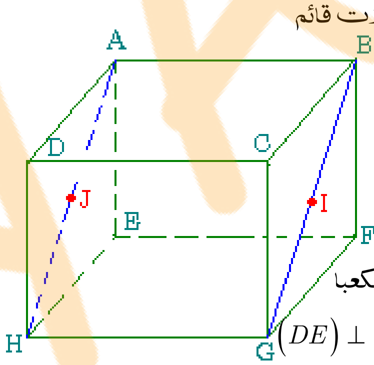
6- بين أن المستقيم $(EN)$ يقطع المستوى $(ABC)$.

7- بين أن $(MBN)=(AEF)$ و $(NFG)\parallel(ADH)$ و $(MBC)\perp(AEH)$

8- بين أن المستويين $(BCH)$ و $(ADF)$ متقاطعان.

## التمرين 2

$ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات قائم




1- بين أن $(AD)\perp(EF)$

2- ليكن $I$ منتصف $[BG]$ و $J$ منتصف $[AH]$

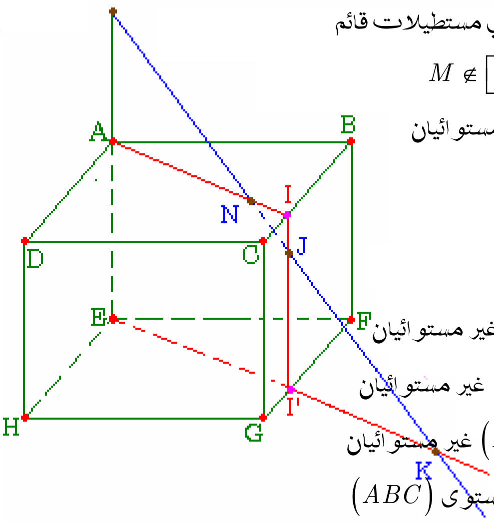
بين أن: $(IJ)\perp(AEH)$

3- بين أنه إذا كان $ABCDEFGH$ مكعبا فإن: $(DCF)\perp(ABG)$ و $(DE)\perp(BG)$

## التمرين 3

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات قائم

$M\in[EA)$ بحيث $M\notin[EA]$




1- بين أن $(MB)$ و $(EF)$ مستوائيان

واستنتج أنهما متقاطعان

2- نفس السؤال بالنسبة

ل: $(MC)$ و $(EG)$

3- بين أن: $(AB)$ و $(EH)$ غير مستوائيان

4- بين أن: $(EG)$ و $(DC)$ غير مستوائيان

5- بين أن: $(MB)$ و $(DC)$ غير مستوائيان

6- لتكن $N$ نقطة من المستوى $(ABC)$

أ- بين أن $(MN)$ يقطع $(EFG)$ و ارسم $K$ نقطة تقاطعهما

ب- بين أن $(MN)$ يقطع $(CBF)$ و ارسم $J$ نقطة تقاطعهما

7- ليكن $O$ منتصف $[BH]$ بين أن: $A;O;G$ نقط مستقيمية

8- ارسم تقاطع $(ACG)$ و $(DBF)$

## التمرين 4

$ABCD$ مستطيل ضمن مستوى $(P)$

و $(\Delta)$ مستقيم عمودي على $(P)$

ويقطع $[AB]$ في $I$ "$I\neq A; I\neq B$"

نعتبر نقطة $S$ من $(\Delta)$ بحيث $(SA)\perp(SB)$

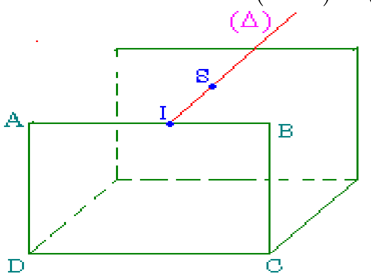
1) أ- بين أن: $(SAD)\perp(AD)$

ب- استنتج أ: $(SBH)\perp(SAD)$

2) أ- حدد $(\Delta')$ تقاطع $(SAD)$ و $(SBH)$

ثم أنشئه .

ب- بين أن: $(P)\parallel(\Delta')$




## التمرين 5

ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه $I$، $M$ نقطة مخالفة للنقطة $A$

وتنتمي إلى المستقيم المار من $A$ والعمودي على المستوى $(ABC)$

و $J$ منتصف $[MC]$

1- أنشئ الشكل

2- بين أن $(IJ)\parallel(MA)$

3- حدد تقاطع المستويين $(JBD)$ و $(MAC)$

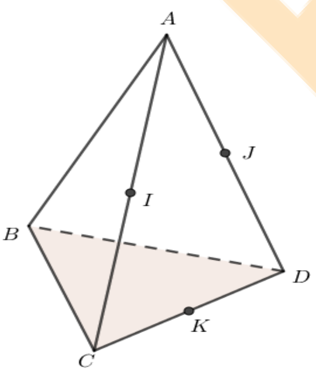
4- بين أن $(JBD)\perp(ABC)$

## التمرين 6

نعتبر في الفضاء رباعي أوجه $ABCD$

و $I$ و $J$ و $K$ هي على التوالي منتصفات $[AC]$ و $[AD]$ و $[CD]$

و $G$ مركز ثقل المثلث $ACD$




1- أ- بين أن النقط $B$ و $C$ و $I$ و $J$

غير مستوائية.

ب- حدد $(BCJ)\cap(BDI)$

2- أ- بين أن المستويين $(BIJ)$ و $(BCD)$

يتقاطعان وفق المستقيم $(\Delta)$ المار من $B$

والموازي للمستقيم $(CD)$

3- أ- لنفترض أن المثلث $BCD$ متساوي

الساقين رأسه $B$ وأن المستقيم $(AK)$ عمودي على المستوى $(BCD)$

بين أن المستقيم $(CD)$ عمودي على المستوى $(ABK)$

ب- استنتج أن $(\Delta)\perp(BG)$

Correction : https://drive.google.com/file/d/1-y6F8Yhbnug_r-VjYyKCI2QxNoqkl8ay/view?usp=sharing

# DL6

TCSF
Mathématique
Aissa HIYAB

**Dans l'exercice 1 les parties A), B), C) et D) sont indépendants et dans l'exercice 2 les parties A) et B) sont indépendants.**

## Exercice 1 (Produit scalaire)

**A)** $ABC$ un triangle tel que $AB=3,\ AC=1$ et $cos(B\hat{A}C)=\dfrac{-1}{3}$

1) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

2) Montrer que $BC=2\sqrt{3}$

3) Soit $I$ le milieu du segment $[AB]$, calculer $CI$

4) a) Calculer par deux méthodes le produit scalaire $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

b) En déduire que $cos(A\hat{C}B)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

5) Soit $D$ le point tel que $\overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}$ et $F$ le milieu du segment $[BC]$

a) Ecrire le vecteurs $\overrightarrow{DF}$ en fonction de $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$

b) En déduire que $\overrightarrow{DF}=\dfrac{1}{18}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

c) Montrer que $DF=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

d) Montrer que $(DF)\perp(AB)$

e) En déduire la nature du triangle $ADF$

6) En utilisant la formule de Héron, montrer que l'aire du triangle $ABC$ est $ADF$

**B)** Soit $ABC$ un triangle rectangle en A et $H$ le projeté orthogonal de $A$ sur la droite $(BC)$ tel que $AH=3$ et $A\hat{B}C=\dfrac{\pi}{6}$

1) Calculer les distances $BA,\ CA,\ BC,\ BH$ et $CH$

2) On suppose que $AB=6$

Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan dans les cas suivants :

a) $MA^2+MB^2=218$ ; b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=40$

**C)** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan montrer que :

1) $\vec{u}.\vec{v}=\dfrac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

2) $|\vec{u}.\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$

**D)** Soit $m_1$, $m_2$ et $m_3$ les médianes d'un triangle $ABC$. Montrer que

$m^2+m_2{}^2+m_3{}^2=\dfrac{3}{4}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)$

## Exercice 2 (Transformations)

**A)** Soit $ABCD$ un parallélogramme, $I$ et $J$ deux points du plan tels que : $\overrightarrow{CI}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$. On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

1) Construire une figure convenable

2) Vérifier que $t_{\vec{u}}(I)=J$ , $t_{\vec{u}}(A)=B$ et déduire que $t_{\vec{u}}((AI))=(BJ)$

3) a) Soit $h$ une homothétie, montrer que $h((BA))\,||\,(DC)$

b) On suppose que $h(B)=C$ montrer que $h((BA))=(DC)$ (remarquer que $B\in(BA)$)

4) Dans la suite de cette partie on suppose que $h(B)=C$ et que $I$ est le centre de $h$.

a) Montrer que le rapport de $h$ est $k=-2$.

b) Soit $E$ l'image de $J$ par $h$.

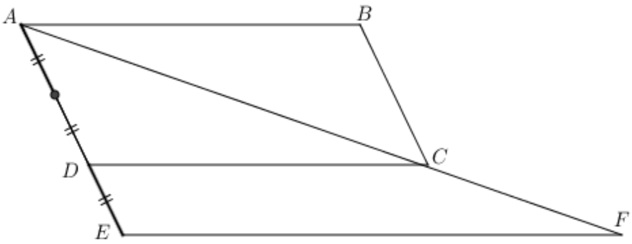
Montrer que $\overrightarrow{EC}=-2\overrightarrow{JB}$, $\overrightarrow{EI}=2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CE}$

5) Soit $F$ le point d'intersection des droites $(BA)$ et $(ID)$, montrer que $h(F)=D$

6) On pose $h(A)=A'$ montrer que les points $D,\ C$ et $A'$ sont alignés.

**B)** Soit $ABCD$ un parallélogramme, $E$ le point du plan tel que : $\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Soit $F$ la projeté de $E$ sur $(AC)$ parallèlement à $(DC)$




On considère l'homothétie $h$ de centre $A$ tel que $h(D)=E$

1) Montrer que le rapport de l'homothétie $h$ est $k=\dfrac{3}{2}$

2) Déterminer l'image du point $C$ par l'homothétie $h$

3) En déduire la distance $EF$ on fonction de $DC$

4) Soit $J$ l'image de $A$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$.

a) Montrer que $h(B)=J$

b) En déduire que $(BD)\,||\,(JE)$

## Exercice 3 (Géométrie de l'espace)

Exercice 1 de la série 15

**Correction** : https://drive.google.com/file/d/14LBed-CdwLj8brEzuuPXcpPJx9KZJ9jE/view?usp=sharing