14

Transformations

1) Translation – Symétrie centrale – Symétrie axiale

1-1 Définitions des transformations : symétrie centrale - symétrie axiale - translation

Activité 1 :

Soit $ABCD$ un carré de centre O, I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$.

1) Construire une figure convenable.

2) a) Déterminer l'image du point A par la translation du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

b) Déterminer l'image du point B par la translation du vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

c) Déterminer l'image du segment $[BO]$ par la translation du vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

Activité 2 :

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O, I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$.

1) Déterminer les symétrie de chacun des points A, B et O par rapport au point O.

2) En déduire la symétrie de la droite (AB) par rapport au point O.

Activité 3 :

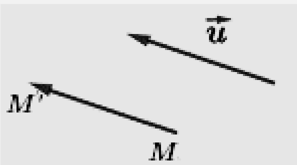
Soit $ABCD$ un losange de centre O, I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$.

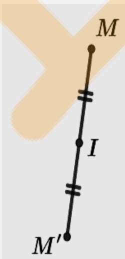
1) Construire une figure convenable.

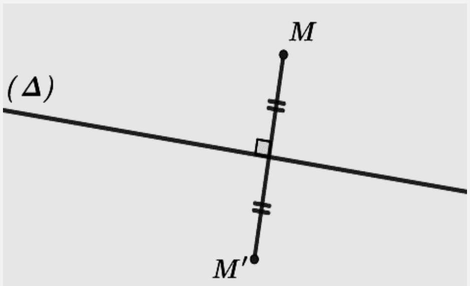
2) a) Déterminer les symétrie de chacun des points B, O et I par rapport à la droite (AC).

b) En déduire la symétrie de la droite (IO) par rapport à la droite (AC).

Définitions 1 :

<table>
<tr><th>Translation</th><th>La symétrie centrale</th><th>La symétrie axiale</th></tr>
<tr>
<td>Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.
La translation du vecteur $\vec{u}$ est la transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{MM'}$.


On dit que M' est l'image de M par la translation du vecteur $\vec{u}$ et on écrit $t_{\vec{u}}(M)=M'$.
Ainsi
$t_{\vec{u}}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u}$</td>
<td>Soit I un point du plan.
La symétrie centrale de centre I est la transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' défini par :
Si : $M \neq I$, alors I est le milieu du segment $[MM']$.
Si : $M=I$, alors $M'=M$.


On dit que M' est l'image de M par la symétrie centrale de centre I, on note $S_I(M)=M'$.
Ainsi si : $M \neq I$, alors :
$S_I(M)=M' \Leftrightarrow I$ est le milieu du segment $[MM']$</td>
<td>Soit (Δ) une droite du plan.
La symétrie axiale d'axe (Δ) est la transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' défini par :
Si : $M \in (\Delta)$, alors $M'=M$.
Si : $M \notin (\Delta)$, alors (Δ) est la médiatrice du segment $[MM']$.


On dit que M' est l'image de M par la symétrie axiale d'axe (Δ) , on note $S_{(\Delta)}(M)=M'$.
Ainsi si : $M \notin (\Delta)$, alors :
$S_{(\Delta)}(M)=M' \Leftrightarrow (\Delta)$ est la médiatrice du segment $[MM']$</td>
</tr>
</table>

Remarques 1 : Les points invariant

- Il n'y a aucun point invariant par une translation de vecteur non nul, et tous les points sont invariant par la translation du vecteur nul.
- $S_I(I)=I$, on dit que le point I est invariant par la symétrie centrale S_I et c'est le seul point invariant par S_I .
- Si $M \in (\Delta)$, alors $S_{(\Delta)}(M)=M$. Les points de (Δ) sont les seuls points invariants par la symétrie axiale $S_{(\Delta)}$.

Remarques 2 :

- $t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B$; $t_{\vec{0}}(A)=A$
- $t_{-\vec{u}}(A)=B \Leftrightarrow t_{\vec{u}}(B)=A$.
- $S_I(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'}=-\overrightarrow{IM}$
- $S_I(M)=M' \Leftrightarrow S_I(M')=M$.
- $S_{(\Delta)}(M)=M' \Leftrightarrow S_{(\Delta)}(M')=M$.
- La symétrie axiale $S_{(\Delta)}$ est appelé aussi symétrie orthogonale ou réflexion.

1-2 L'image des figures par les transformations : symétrie centrale - symétrie axiale - translation

Activité 4 :

Soit (C) un cercle de centre A et de rayon R. B est un point de (C).

1) a) Construire A' et B' les images respectives des points A et B par la symétrie centrale S_I.

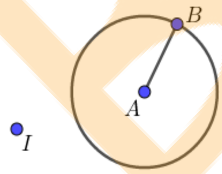
b) Montrer que $A'B'=R$ et $(A'B')\parallel(AB)$.

2) Soit M un point de (C) et M'son image par la symétrie centrale S_I.

On note (C') le cercle de centre A' et de rayon R .

a) Vérifier que $A'M'=R$ et déduire que $M'\in(C')$.

b) En déduire que l'image du cercle (C) par la symétrie centrale S_I est le cercle (C') .



Définition 2 :

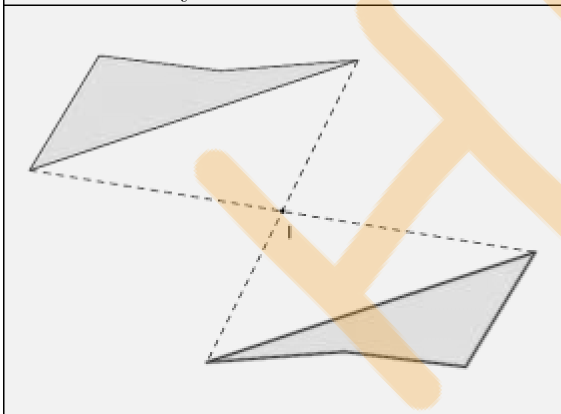
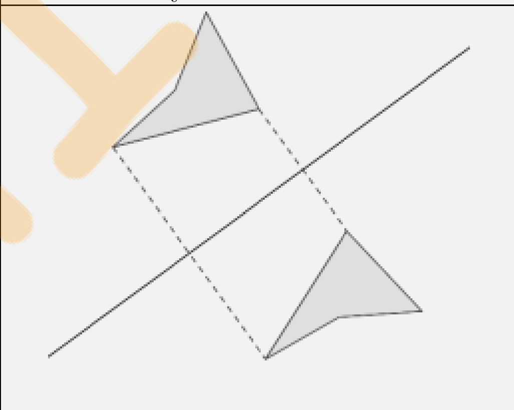
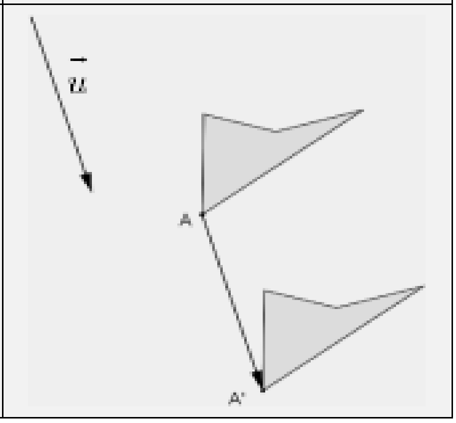
Soit T une symétrie centrale ou une symétrie axiale ou une translation.

- L'image d'une figure par la transformation T est l'image de tous ces points par cette transformation.

Soit (ξ) une figure géométrique. On note $T((\xi))$ l'image de (ξ) par la transformation T.

- Si un point M appartient à (ξ) alors son image $T(M)$ appartient à $T((\xi))$.

Autrement dit : Si $M\in(\xi)$ alors $T(M)\in T((\xi))$

Symétrie centrale	Symétrie axiale	Translation
		

Propriétés 1 : L'image des figures usuelles

Soit T une symétrie centrale, une symétrie axiale ou une translation.

Soit A, B et C trois points du plan, on pose : $T(A)=A'$, $T(B)=B'$et $T(C)=C'$.

1) L'image d'un cercle de centre A et de rayon R par la transformation T est un cercle de centre $T(A)=A'$ et de même rayon R.

2) L'image d'un segment par la transformation T est un segment de même longueur.

- On note $T([AB])$l'image du segment $[AB]$ par la transformation T .
- On a : $T([AB])=[A'B']$.

3) L'image d'un angle géométrique par la transformation T est un angle de même mesure.

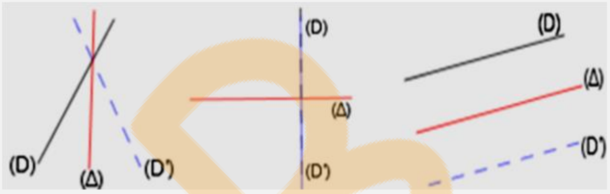
- On note $T\left(B\hat{A}C\right)$ l'image de l'angle $B\hat{A}C$ par la transformation T
- On a : $T\left(B\hat{A}C\right)=B'\hat{A}'C'$ de plus : $B\hat{A}C=B'\hat{A}'C'$.

4) L'image d'une droite par une symétrie centrale ou par une translation est une droite qui lui est parallèle.

- On note $T\left((AB)\right)$ l'image de la droite (AB) par la transformation T
- On a : $T\left((AB)\right)=\left(T(A)T(B)\right)$ c'est-à-dire $T\left((AB)\right)=(A'B')$ de plus si T est une symétrie centrale ou une translation alors $(AB)//(A'B')$.

5) L'image d'une droite (D) par une symétrie axiale $S_{(\Delta)}$ est une droite (D') :

- Si $(D)\|(\Delta)$ alors $(D')\|(\Delta)$.
- Si (D) est perpendiculaire à (Δ) alors $(D')=(D)$.
- Si (D) coupe (Δ) en un point M alors (D') coupe (Δ) en M.



6) L'image d'une demi-droite par la transformation T est une demi-droite.

Exemple 1 :

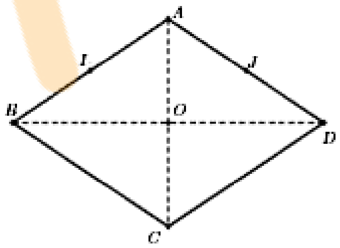
Soit ABC un triangle isocèle en A et O le milieu du segment $[BC]$.

1) Déterminer l'image de la droite (AB) par S_O .
2) Déterminer l'image du segment $[BO]$ par S_O .
3) Déterminer l'image de l'angle $A\hat{B}O$ par S_O .

Exemple 2 :

Soient $ABCD$ un losange du centre O, I et J sont respectifs les milieux des segments $[AB]$ et $[AD]$

1) Déterminer les images des points B, O et I par $S_{(AC)}$.
2) Déterminer l'image de la droite (IO) par $S_{(AC)}$.
3) Déterminer l'image du segment $[BO]$ par $S_{(AC)}$.
4) Déterminer l'image de l'angle $A\hat{B}O$ par $S_{(AC)}$.



1-3 Les propriétés des transformations : symétrie centrale - symétrie axiale - translation

Propriétés 2 :

La propriété caractéristique de la symétrie centrale

Soit T une transformation du plan.

T est une symétrie centrale si et seulement si pour tous points M et N du plan d'images M' et N' respectivement par T on a $\overrightarrow{M'N'}=-\overrightarrow{MN}$

La propriété caractéristique de la translation

Soit T une transformation du plan.

T est une translation si et seulement si pour tous points M et N du plan d'images M' et N' respectivement par T on a $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$

Exemple 3 :

ABC un triangle, on note $\vec{u}=\overrightarrow{BA}$, $t_{\vec{u}}(A)=A'$, $t_{\vec{u}}(C)=C'$, $S_B(A)=A"$ et $S_B(C)=C"$.

1) Construire une figure.
2) En utilisant la propriété caractéristique de la translation et de la symétrie centrale. Montrer que $\overrightarrow{C'A'}=-\overrightarrow{C"A"}$.

Activité 5 :

Soit T une translation $t_{\vec{u}}$ ou une symétrie centrale S_I.

Soit $A,\ B,\ C$ et D quatre points du plan tel que $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}$

On pose : $T(A)=A'$, $T(B)=B'$., $T(C)=C'$ et $T(D)=D'$.

1) Supposons que $T=t_{\vec{u}}$. En utilisant la propriété caractéristique de la translation montrer que $\overrightarrow{A'B'}=3\overrightarrow{C'D'}$.

2) Supposons que $T=S_I$. En utilisant la propriété caractéristique de la symétrie centrale montrer que $\overrightarrow{A'B'}=3\overrightarrow{C'D'}$.

Propriétés 3 :

Soit T une symétrie centrale ou une symétrie axiale ou une translation.

Soit $A,\ B,\ C$ et D quatre points du plan, on pose : $T(A)=A'$, $T(B)=B'$, $T(C)=C'$ et $T(D)=D'$.

T conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs :

Si : $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{CD}$ où α est un réel, alors $\overrightarrow{A'B'}=\alpha\overrightarrow{C'D'}$.

On dit que la symétrie centrale, la symétrie axiale et la translation conservent le coefficient de colinéarité.

T conserve l'alignement des points :

- Les images de trois points alignés par la transformation T sont trois points alignés.

Autrement dit : Si $A,\ B$ et C sont trois points alignés, alors les points A', B' et C' sont alignés.

- On dit que la symétrie centrale, la symétrie axiale et la translation conservent l'alignement des points.

T conserve le milieu d'un segment :

A et B sont deux points distincts du plan.

Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors le point $I'=T(I)$ est le milieu du segment $[A'B']$.

On dit que la symétrie centrale, la symétrie axiale et la translation conservent le milieu.

T conserve le parallélisme :

- Si $(AB)\parallel(CD)$ alors $(A'B')\parallel(C'D')$.

Autrement dit : Les images de deux droites parallèles par la transformation T sont deux droites parallèles.

- On dit que la symétrie centrale, la symétrie axiale et la translation conservent le parallélisme.

Exemple 4 :

ABC est un triangle rectangle en A et O le milieu de $[BC]$.

On note $S_{(AB)}(O)=I$ et $S_{(AC)}(O)=J$

1) Construire une figure.

2) Montrer que $t_{\overrightarrow{OA}}(B)=I$ et $t_{\overrightarrow{OA}}(C)=J$

3) Les points $I,\ A$ et J sont-ils alignés ? Justifier.

4) Démontrer que A est le milieu de $[IJ]$.

Activité 6 :

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et $t_{\vec{u}}$ la translation du vecteur $\vec{u}$.

A et B deux points du plan, on pose $t_{\vec{u}}(A)=A'$ et $t_{\vec{u}}(B)=B'$.

1) En utilisant la propriété caractéristique de la translation montrer que $A'B'=AB$.

2) Soit C un point du plan tel ABC est un triangle, on pose $t_{\vec{u}}(C)=C'$.

   a) Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont identiques puis en déduire que $B\hat{A}C=B'\hat{A'}C'$.

   b) En déduire que si $(AB)\perp(AC)$ alors $(A'B')\perp(A'C')$.

Propriétés 4 :

Soit T une symétrie centrale ou une symétrie axiale ou une translation.

Soit $A,\ B,\ C$ et D quatre points du plan, on pose : $T(A)=A'$, $T(B)=B'$., $T(C)=C'$ et $T(D)=D'$.

T conserve la distance :

- $A'B' = AB$.

Autrement dit : La distance entre deux points est égale à celle de leurs images par la transformation T.

- On dit que la symétrie centrale, la symétrie axiale et la translation conservent les distances ou qu'elles sont isométries.

T conserve les mesures des angles géométriques :

- $B'\hat{A}'C' = B\hat{A}C$.

Autrement dit : l'image d'un angle géométrique par la transformation T est un angle de même mesure.

- On dit que la symétrie centrale, la symétrie axiale et la translation conservent les mesures des angles géométriques.
- Remarque : la symétrie axiale inverse les mesures des angles orientés.

T conserve l'orthogonalité :

- Si : $(AB) \perp (CD)$, alors $(A'B') \perp (C'D')$.

Autrement dit : Les images de deux droites perpendiculaires par la transformation T sont deux droites perpendiculaires.

- On dit que la symétrie centrale, la symétrie axiale et la translation conservent l'orthogonalité.

T conserve l'intersection des figures géométriques :

- Si un point est l'intersection de deux figures géométriques alors son image par la transformation T est l'intersection des images de ces deux figures par cette transformation.
- On dit que la symétrie centrale, la symétrie axiale et la translation conservent l'intersection.

Exemple 5 : Soit $OABC$ un rectangle.

On considère la translation t de vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{OC}$.

1) Construire les points O', A', B' et C' les images respectives des points O, A, B et C par la translation t.

2) Montrer que le quadrilatère $O'A'B'C'$ est un rectangle.

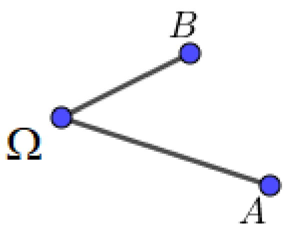
3) Soit M un point du plan, on pose $t_{\vec{u}}(M) = N$. Montrer que $CM = C'N$.

2) Homothétie

2-1 Définition d'une homothétie

Activité 7 :

Soient Ω , A et B trois points non alignés du plan (Voir la figure ci-contre)



1) Construire les points A' et B' tels que $\overrightarrow{\Omega A'} = 3\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega B'} = 3\overrightarrow{\Omega B}$

A' est appelé l'image du point A par l'homothétie de centre Ω et du rapport 3 .

On écrit $h_{(\Omega;3)}(A) = A'$ ou $h(A) = A'$

2) a) Déterminer l'image du point B par l'homothétie h de centre Ω et du rapport 3 .

b) Déterminer $h(\Omega)$.

3) Déterminer l'image de la droite (AB) par l'homothétie h (C'est-à-dire déterminer $h((AB))$)

4) Montrer que $\overrightarrow{A'B'} = 3\overrightarrow{AB}$ et déduire que $h((AB)) \parallel (AB)$

5) Soit M un point distinct des points Ω , A et B . On pose $h(M) = M'$.

Déterminer la relation vectorielle qui permet de construire le point M'.

Définition 3 :

Soit Ω un point du plan et k un réel non nul.

La transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' défini par :

$\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$ s'appelle **l'homothétie** de centre Ω et du rapport k .

On dit que M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et du rapport k , on écrit :

$h_{(\Omega;k)}(M) = M'$ ou $h(M) = M'$

Ainsi : $h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$

Remarques 3 :

Soit $h_{(\Omega;k)}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport k .

- Si $h(A)=A'$ alors les points A', A et Ω sont alignés.
- Si $k\neq 1$ alors le centre Ω d'homothétie h est le seul point invariant par cette homothétie.
- Si $|k|>1$ on dit que $h_{(\Omega;k)}$ est un agrandissement de rapport $|k|$.
- Si $|k|<1$ on dit que $h_{(\Omega;k)}$ est une réduction de rapport $|k|$.
- $h_{(\Omega;k)}(M)=M' \Leftrightarrow h_{\left(\Omega;\frac{1}{k}\right)}(M')=M$
- Tous les points du plan sont invariants par l'homothétie de rapport $k=1$.
- Si $k=-1$ alors $h_{(\Omega;-1)}(M)=M'$ signifie $\overrightarrow{\Omega M}=-\overrightarrow{\Omega M'}$ donc $h_{(\Omega;-1)}$ est la symétrie centrale de centre Ω.

Exemple 6 :

1) Soit I et A deux points distincts du plan.
   a) Construire l'image A' de A par l'homothétie de centre I et de rapport 3 .
   b) Construire A'' l'image de A par l'homothétie de centre I et de rapport -2 .
2) Quel est le rapport de l'homothétie de centre O et qui transforme le point A en B tel que $\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{OB}$?

Exemple 7 :

A, B et C trois points du plan et soit h l'homothétie de centre A tel que $h(B)=C$.

Déterminer le rapport de l'homothétie h dans les cas suivants :

1) $\overrightarrow{CA}=4\overrightarrow{AB}$
2) $2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$

2-2 L'image des figures usuelles par l'homothétie

Définition 4 :

Soit h une homothétie de centre Ω et de rapport k .

- L'image d'une figure par l'homothétie h est l'image de tous ces points par cette homothétie.

Soit (ξ) une figure géométrique. On note $h((\xi))$ l'image de (ξ) par l'homothétie h.

- Si un point M appartient à (ξ) alors son image $h(M)$ appartient à $h((\xi))$.

Autrement dit : Si $M\in(\xi)$ alors $h(M)\in h((\xi))$

Propriétés 5 :

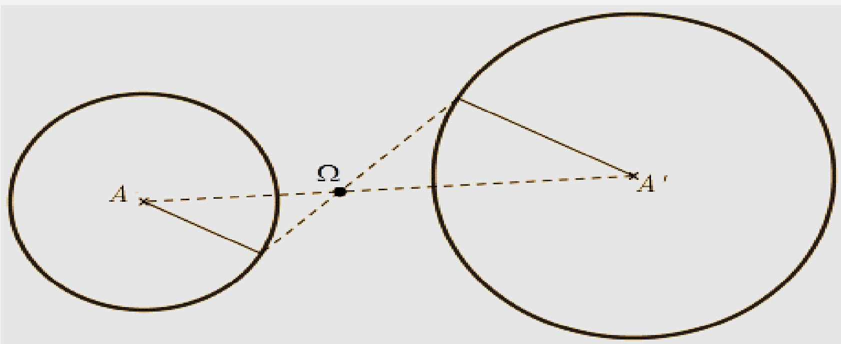
h désigne une homothétie de centre Ω et de rapport k .

Soient A, B, C et D quatre points du plan, on pose : $h(A)=A'$, $h(B)=B'$, $h(C)=C'$ et $h(D)=D'$

1) L'image d'une figure géométrique par une homothétie est l'image de tous ces points par cette homothétie.
2) L'image d'un segment par une homothétie est un segment.

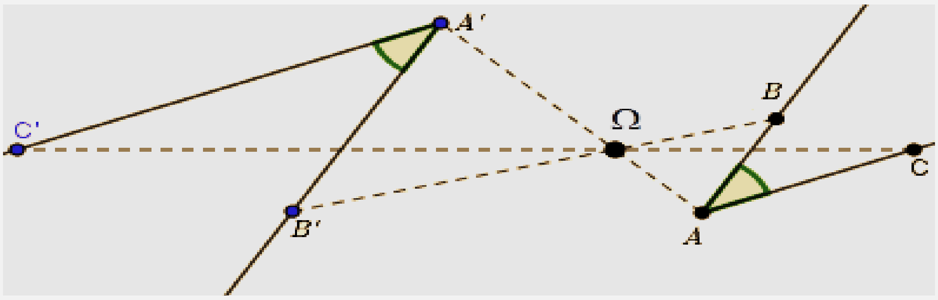
- On note $h([AB])$ l'image du segment $[AB]$ par l'homothétie h.
- On a $h([AB])=[A'B']$

3) L'image d'un cercle de centre A et de rayon R par une homothétie h est un cercle de centre A' et de rayon $|k|\times R$.



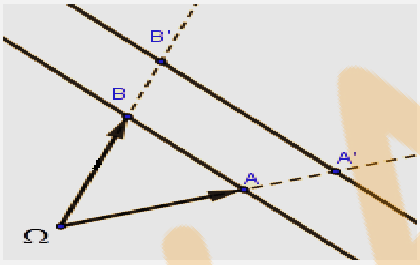
4) L'image d'un angle géométrique par une homothétie est un angle de même mesure

- On note $h\left(B\hat{A}C\right)$ l'image de l'angle $B\hat{A}C$ par l'homothétie h.
- On a $h\left(B\hat{A}C\right)=B'\hat{A}'C'$ de plus on a $B\hat{A}C=B'\hat{A}'C'$



5) L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle

- On note $h\left((AB)\right)$ l'image de la droite (AB) par l'homothétie h
- On a $h\left((AB)\right)=\left(h(A)h(B)\right)$ c'est-à-dire $h\left((AB)\right)=(A'B')$ de plus on a $(AB)\parallel(A'B')$



- Si le centre de l'homothétie h appartient à une droite (Δ) alors $h\left((\Delta)\right)=(\Delta)$

6) L'image d'une demi-droite par une homothétie est une demi-droite.

7) L'image du triangle ABC par l'homothétie h est le triangle $A'B'C'$.

- On dit que ABC et $A'B'C'$ sont des triangles homothétiques.
- Si S et S' sont les aires respectives des triangles ABC et $A'B'C'$ alors $S'=k^2\times S$.

2-3 Les propriétés d'homothétie

Activité 8 :

Ω un point du plan et $h_{(\Omega;k)}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

1) On pose $h(M)=M'$ et $h(N)=N'$, montrer que $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$

2) Soit T une transformation du plan qui admet un unique point invariant A.

On suppose que $T(M)=M'$, $T(N)=N'$ et $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$ pour tous points M et N du plan.

En choisissant $N=A$ montrer que T est une homothétie et que $k\neq 1$.

Propriété 6 : La propriété caractéristique d'homothétie

Soit T une transformation du plan.

T est une homothétie de rapport $k\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$ si et seulement si pour tous points M et N du plan d'images M' et N' respectivement par T on a $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$

Remarque 4 : Conséquence :

Si M et N sont deux points du plan, M' et N' sont leurs images par l'homothétie $h_{(\Omega;k)}$ alors $M'N'=|k|\times MN$

En général l'homothétie ne conserve pas les distances.

Exemple 8 :

Soit $ABCD$ un parallélogramme, on considère l'homothétie h de centre D et de rapport -2.

1) Construire les points A', B' et C' tels que $h(A)=A'$, $h(B)=B'$ et $h(C)=C'$.

2) Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables.

Activité 9 :

Soit Ω un point du plan et k un réel non nul.

On considère les points $A,\ B,\ C$ et D tel que $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{CD}$ avec $(\alpha\in\mathbb{R})$

Soit $h_{(\Omega;k)}$ l'homothétie de centre I et de rapport k.

On pose $h(A)=A'$, $h(B)=B'$, $h(C)=C'$ et $h(D)=D'$. Montrer que $\overrightarrow{A'B'}=\alpha\overrightarrow{C'D'}$

Propriétés 7 :

h est une homothétie de centre Ω et de rapport k.

Soient $A,\ B,\ C$ et D quatre points du plan, on pose : $h(A)=A'$, $h(B)=B'$, $h(C)=C'$ et $h(D)=D'$.

L'homothétie conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs :

Si $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{CD}$ où α est un réel alors : $\overrightarrow{A'B'}=\alpha\overrightarrow{C'D'}$.

L'homothétie conserve l'alignement des points :

Si $A,\ B$ et C sont trois points alignés alors les points $A',\ B'$ et C' sont alignés.

L'homothétie conserve le milieu d'un segment :

Si A et B sont deux points distincts du plan et I est le milieu du segment $[AB]$ alors le point $I'=h(I)$ est le milieu du segment $[A'B']$.

L'homothétie conserve le parallélisme :

Si $(AB)\parallel(CD)$ alors $(A'B')\parallel(C'D')$

Autrement dit : Les images de deux droites parallèles par une homothétie sont deux droites parallèles.

L'homothétie conserve les mesures des angles géométriques :

- $B'\hat{A}'C'=B\hat{A}C$

Autrement dit : L'image d'un angle géométrique par une homothétie est un angle de même mesure.

- $(\overline{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'}})\equiv(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})[2\pi]$ on dit que l'homothétie conserve les mesures des angles orienté.

L'homothétie conserve l'orthogonalité :

Si $(AB)\perp(CD)$ alors $(A'B')\perp(C'D')$

Autrement dit : Les images de deux droites perpendiculaires par une homothétie sont deux droites perpendiculaires.

L'homothétie conserve l'intersection des figures géométriques :

Soit (ξ) une figure géométrique. On note $h((\xi))$ l'image de (ξ) par l'homothétie h.

- Si $M\in(\xi)$ alors $h(M)\in h((\xi))$
- Si un point est l'intersection de deux figures géométriques alors son image par une homothétie est l'intersection des images de ces deux figures par cette homothétie.

Exercice :

$ABCD$ un parallélogramme et M le point tel que $\overrightarrow{CM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

1) Construire une figure convenable.
2) On considère l'homothétie h de centre A et qui transforme C en M.
   a) Déterminer k le rapport de l'homothétie h.
   b) Construire le point M' l'image de D par l'homothétie h.
3) Soit I l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{M'M}$.
   a) Montrer que $h(B)=I$.
   b) En déduire que $(IM')\parallel(BD)$.
4) Soit (Δ) une droite passant par A et qui coupe la droite (IM) en F et (BC) en E.
   a) Déterminer les images des droites (BC) et (Δ) par l'homothétie h. ; b) Montrer que $h(E)=F$.

Résumé 14 : Transformations

Soit T une symétrie centrale S_I ou une translation $t_{\vec{u}}$ ou une symétrie axiale $S_{(\Delta)}$ ou une homothétie $h_{(\Omega;k)}$.

$A,\ B,\ C,\ D,\ M$ et N des points du plan.

On pose : $T(A)=A'$, $T(B)=B'$, $T(C)=C'$, $T(D)=D'$, $T(M)=M'$ et $T(N)=N'$,

Soit k un réel non nul. (ξ) et (Γ) deux figures du plan.

		La symétrie centrale S_I	**La translation** $t_{\vec{u}}$	**La symétrie axiale** $S_{(\Delta)}$	**L'homothétie** $h_{(\Omega;k)}$
M' est l'image de M		I est le milieu du segment $[MM']$	$\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$	(Δ) médiatrice de $[MM']$	$\overrightarrow{\Omega M'}=k\ \overrightarrow{\Omega M}$
Les points invariants par		I	…………..	Les points de (Δ)	Ω
Les propriétés de la transformation T	**Propriété caractéristique**	$\overrightarrow{M'N'}=-\overrightarrow{MN}$	$\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$	………………	$\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$
	***T* conserve la distance (sauf si $T=h_{(\Omega;k)}$ avec $\lvert k\rvert\neq 1$)**	$A'B'=AB$			$A'B'=\lvert k\rvert AB$
	***T* conserve le coefficient de colinéarité**	Si $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{CD}$ alors : $\overrightarrow{A'B'}=\alpha\overrightarrow{C'D'}$			
	***T* conserve l'alignement**	Si $A,\ B$ et C est alignés alors les points $A',\ B'$ et C' sont alignés			
	***T* conserve le milieu**	Si I est le milieu du segment $[AB]$ alors le point $I'=T(I)$ est le milieu de $[A'B']$			
	***T* conserve le parallélisme**	Si $(AB)\parallel(CD)$ alors $(A'B')\parallel(C'D')$			
	***T* conserve les mesures des angles géométriques**	$B'\hat{A}'C'=B\hat{A}C$			
	***T* conserve l'orthogonalité**	Si $(AB)\perp(CD)$ alors $(A'B')\perp(C'D')$			
	***T* conserve l'appartenance**	Si $M\in(\xi)$ alors $T(M)\in T((\xi))$			
	***T* conserve l'intersection**	Si $(\xi)\cap(\Gamma)=M$ alors $T((\xi))\cap T((\Gamma))=M'$			
L' image des figures usuelles	**L'image d'un segment est un segment**	$T([AB])=[A'B']$			
	L'image d'une droite est une droite	$T((AB))=(A'B')$ et si $T\neq S_{(\Delta)}$ alors $(A'B')\parallel(AB)$			
	L'image d'un cercle de centre A et de rayon R	est un cercle de centre A' et de même rayon R			est un cercle de centre A' et de rayon $\lvert k\rvert\times R$

- $t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B$; • $S_I(M)=M'\Leftrightarrow\overrightarrow{IM'}=-\overrightarrow{IM}$
- Si le centre de l'homothétie h appartient à une droite (Δ) alors $h((\Delta))=(\Delta)$
- Si $h(A)=A'$ alors les points A', A et Ω sont alignés.
- Si $k=-1$ alors $h_{(\Omega;-1)}$ est la symétrie centrale de centre Ω.
- Tous les points du plan sont invariants par l'homothétie de rapport $k=1$.
- Il n'y a aucun point invariant par une translation de vecteur non nul, et tous les points sont invariant par la translation du vecteur nul.
- L'image d'une figure par la transformation T est l'image de tous ces points par cette transformation.

Prof : Aissa HIYAB | Série 14 | Lycée : Abdellah Chafchaouni
Niveau : TCSF | Transformations | Matière : Mathématique

Exercice 1

ABC est un triangle. D est un point de $[AC]$ tel que :

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. On pose

$S_{(AB)}(D)=D'$, $S_{(AB)}(C)=C'$, $S_B(A)=A'$,

$S_B(D')=D''$ et $S_B(C')=C''$.

1) Construire une figure.

2) Montrer que. $\overrightarrow{A'D''}=\frac{1}{4}\overrightarrow{A'C''}$

Exercice 2

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A.

ABB' et ACC' deux triangles équilatéraux.

Les droites (BB') et (CC') se coupent en point I.

Les droites (CB') et (BC') se coupent en point J.

Soit (D) la droite passant par A et perpendiculaire à (BC).

Montrer que les points A, I et J sont alignés.

Exercice 3

ABC un triangle équilatéral et I le milieu de $[BC]$.

Soit A', B', C' et I' les images respectifs de A, B, C et I par la symétrie centrale S_O tel que O est le milieu de $[AC]$

Montrer que les droites $(CI')\perp(B'A)$

Exercice 4

ABC un triangle rectangle en B.

1) Construire le point D la symétrie de C par rapport à la droite (AB).

2) Soit E le milieu de $[AC]$, déterminer F la symétrie de E par rapport à la droite (AB).

3) Montrer que $CE=DF$ et $CF=DE$.

Exercice 5

Soient $ABCD$ un rectangle de centre O et S la symétrie axiale d'axe (BD) et soit A' et C' les images respectives de A et C par la symétrie axiale S.

1) Construire une figure convenable.

2) Montrer que $AA'CC'$ est un rectangle.

Exercice 6

Soit ABC un triangle.

- B' et C' deux points du plan tels que :

$S_A(B)=B'$ et $S_A(C)=C'$.

- B'' et C'' deux points du plan tels que :

$S_{\overline{AC}}(B)=B''$ et $S_{\overline{AC}}(C)=C''$.

1) Construire une figure convenable.

2) Montrer que $(B'C')\parallel(B''C'')$.

Exercice 7

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O.

I et J sont les projetés orthogonaux respectifs de A et C sur la droite (BD). K et L les projetés orthogonaux respectifs de B et D sur la droite (AC)

Soit S_O la symétrie centrale de centre O.

1) Déterminer $S_O(I)$ et $S_O(K)$.

2) Soit E l'orthocentre du triangle OBC et F l'orthocentre du triangle ODA. Montrer que O est le milieu de $[EF]$.

Exercice 8

Soient h l'homothétie de centre I et de rapport 3,

h' l'homothétie de centre O et de rapport -2.

Déterminer les relations vectorielles des homothéties h et h'

Exercice 9

I, A, B, M et N des points du plan et soit h l'homothétie de centre I et de rapport k.

1) On suppose que $h(M)=A$ et $h(N)=B$

Exprimer avec des relations vectorielles les écritures précédentes.

2) En déduire que $\overrightarrow{h(M)h(N)}=k\overrightarrow{MN}$

Exercice 10

Soient A, B et L trois points du plan tels que $\overrightarrow{AL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Déterminer le rapport de l'homothétie de centre L qui transforme A en B.

Exercice 11

Soit $C(O;2)$ et $C'(O';1)$ deux cercles tel que $OO'=7$

On considère l'homothétie $h\left(I,\frac{-1}{2}\right)$ de centre I et de rapport $k=-\frac{1}{2}$ qui transforme O en O'.

1) Faire une figure.

2) Quelle est l'image de (C) par l'homothétie h ?

Exercice 12

Soient ABC un triangle du sommet A.

B' le point tel que $\overrightarrow{BB'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

C' le point tel que $C'\in(AC)$ et $(B'C')\parallel(BC)$

Soit h l'homothétie de centre A et qui transforme B en B'.

1) Déterminer le rapport de l'homothétie h.

2) Montrer que $h(C)=C'$

Exercice 13

ABC un triangle et (C) son cercle circonscrit et soit D le point tel que A et D sont diamétralement opposés.

Soit I le milieu de $[BC]$.

Soit B' le point tel que B est le milieu de $[AB']$.

Soit C' le point tel que C est le milieu de $[AC']$.

Le point H est la projection orthogonale du point D sur la droite $(B'C')$.

1) Construire la figure.

2) Montrer que le point H est le milieu du $[B'C']$.

Montrer que les points A, I et H sont alignés.

Correction :

https://drive.google.com/file/d/168dMw47cKCzq4lubqiA8KtwQ95btHmU4/view?usp=sharing

Exercice 14

Soit A et B deux points distincts du plan

On considère la transformation T qui associe à chaque point M du plan le point M' tel que

$3\overrightarrow{MM'}-\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

1) Déterminer vectoriellement O le point invariant par la transformation T.

2) Déterminer $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de $\overrightarrow{OM}$.

3) En déduire la nature de la transformation T.

Exercice 15

Soit A et B deux points distincts du plan

On considère la transformation T qui associe à chaque point M du plan le point M' tel que

$2\overrightarrow{M'A}-2\overrightarrow{M'B}+3\overrightarrow{M'M}=\vec{0}$

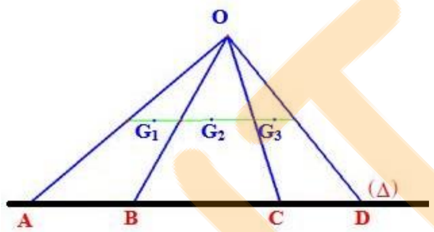
Montrer que T est une translation de vecteur à déterminer.

Exercice 16

$A,\ B,\ C$ et D quatre points d'une droite (Δ) et O un point n'appartient pas à (Δ).

Soit G_1, G_2 et G_3 les centres de gravité des triangles OAB, OBC et OCD respectivement.

En utilisons l'homothétie, montrer que G_1, G_2 et G_3 sont alignés.



Exercice 17 : Cercle d'Euler

Si ABC est un triangle. Alors les milieux A', B' et C' de ses côtés, les milieux P_A, P_B et P_C des segments $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$, où H est son orthocentre, et les pieds H_A, H_B et H_C des hauteurs. Sont sur un même cercle appelé le cercle d'Euler.

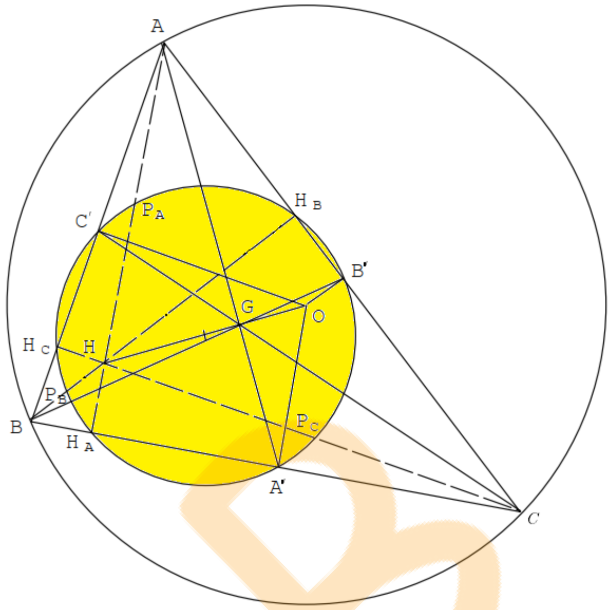
Le centre de ce cercle est le milieu de $[OH]$ où O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Démonstration :

Nous avons vu (Série 2/ Exercice 13) que l'orthocentre H, le centre de gravité G, et le centre du cercle circonscrit O d'un triangle sont situé sur une même droite appelé la droite d'Euler.

Et que $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$

On note Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et R son rayon.



1) Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $-\dfrac{1}{2}$

On pose $h(O)=\Omega$ et on désigne par Γ' le cercle de centre Ω et de rayon $\dfrac{R}{2}$

a) Montrer que $h(\Gamma)=\Gamma'$

b) Montrer que $h(A)=A'$, $h(B)=B'$ et $h(C)=C'$

c) En déduire que $A'\in\Gamma'$, $B'\in\Gamma'$ et $C'\in\Gamma'$

2) Vérifier que $\overrightarrow{G\Omega}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GO}$ puis montrer que Ω est le milieu du segment $[OH]$

3) Soit h' l'homothétie de centre H et de rapport $\dfrac{1}{2}$

On désigne par P_A, P_B et P_C les milieux respectifs des segments $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$

a) Vérifier que $h'(O)=\Omega$

b) En déduire que $h'(\Gamma)=\Gamma'$

c) Montrer que $h'(A)=P_A$, $h'(B)=P_B$ et $h'(C)=P_C$

d) En déduire que $P_A\in\Gamma'$, $P_B\in\Gamma'$ et $P_C\in\Gamma'$

4) Soit (D_A) la droite parallèle à $(A'O)$ passant par Ω

On désigne par H_A, H_B et H_C les pieds de hauteurs issues de A, B et C respectivement.

a) Montrer que (D_A) est la médiatrice de $[A'H_A]$

b) En déduire que $\Omega H_A=\dfrac{R}{2}$ puis que $H_A\in\Gamma'$.

c) Démontrer que $H_B\in\Gamma'$ et $H_C\in\Gamma'$.

Application :

Soit I et I' les centres des cercles inscrits aux triangles ABC et $A'B'C'$ respectivement.

Montrer que les points I, G et I' sont alignés.