13

Produit scalaire

1) Définition du produit scalaire

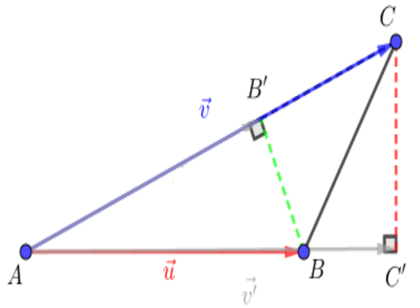
Activité 1 :

Soit ABC un triangle non rectangle.

Le point B' est le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC).

Le point C' est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v}'=\overrightarrow{AC'}$ (Voir la figure ci-contre)



1) a) Vérifier que $B\hat{A}B'=C\hat{A}C'$ et $\cos(B\hat{A}B')=\dfrac{AC'}{AC}=\dfrac{AB'}{AB}$

b) En déduire que $AB\times AC\times\cos(B\hat{A}B')=AB\times AC'=AB'\times AC$

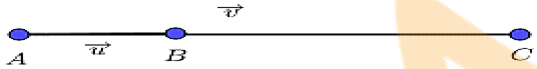
2) Vérifier que $B\hat{A}B'=B\hat{A}C$ et déduire que : $\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}'\|=AB\times AC\times\cos(B\hat{A}C)$

Définition 1 :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, on note A, B et C les points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

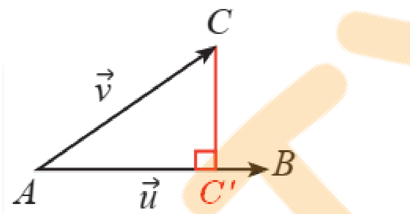
Le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini par :

→ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC$

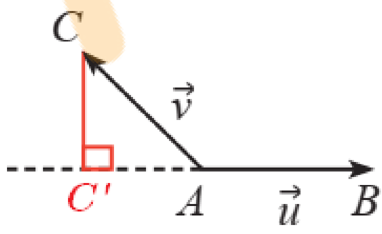


→ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire alors $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AB\times AC$

→ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$ où C' est le projeté orthogonal du point C sur (AB)



$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}=AB\times AC'$



$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}=-AB\times AC'$

Propriété 1 et définition 2 : La formule trigonométrique du produit scalaire

- Quel que soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan on a :

$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\alpha)$ ou α est une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

- Quel que soit les points A, B et C du plan on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(B\hat{A}C)$

Cette formule est appelée **la formule trigonométrique** du produit scalaire.

Remarques 1 :

- Si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul alors $\vec{u}.\vec{v}=0$.
- Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{u}$ est appelé **le carré scalaire** de $\vec{u}$ on le note $\vec{u}^2$, on écrit : $\vec{u}^2=\vec{u}.\vec{u}$.

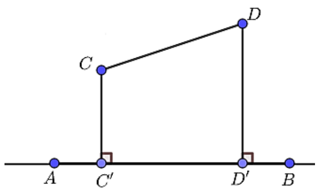
On a : $\vec{u}^2=\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos(\widehat{\vec{u};\vec{u}})=\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|\times 1=\|\vec{u}\|^2$, d'où $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$ ou encore $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$.

- Pour tous points A et B du plan on a $\overrightarrow{AB}^2=AB^2$

Propriété 2 :

En général le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est le nombre réel :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$ où C' et D' sont les projetés orthogonaux des points C et D sur la droite (AB) respectivement.



Exemple 1 :

$ABCD$ un rectangle de centre I tel que $AB=6$ et $AD=3$.

Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DI}$

Exemple 2 :

1) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ dans les cas suivants :

a) $\|\vec{u}\|=5,\ \|\vec{v}\|=6$ et $(\overline{\vec{u};\vec{v}})\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

b) $\|\vec{u}\|=\sqrt{3},\ \|\vec{v}\|=4$ et $(\overline{\vec{u};\vec{v}})\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$

c) $\|\vec{u}\|=2,\ \|\vec{v}\|=5$ et $(\overline{\vec{u};\vec{v}})\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$cos(\pi-x)=-cos(x)$
$cos(\pi+x)=-cos(x)$
$cos(-x)=cos(x)$

2) Soit ABC un triangle tel que $AB=3,\ AC=4$ et $B\hat{A}C=\frac{4\pi}{3}$. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

3) Soit MNE un triangle tel que $MN=5,\ ME=3$ et $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{ME}=-6$. Calculer $cos(\overline{\overrightarrow{MN};\overrightarrow{ME}})$.

Exercices : Exercices 1 et 2 de la série 13.

2) Les propriétés du produit scalaire

Activité 2 :

Soit $\vec{u},\ \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de même norme.

Soit $O,\ A,\ B$ et C quatre points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA},\ \vec{v}=\overrightarrow{OB}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{OC}$.

On suppose que $A\hat{O}B=\frac{\pi}{3}$, $B\hat{O}C=\frac{\pi}{4}$ et $A\hat{O}C=\frac{\pi}{12}$

Calculer puis comparer $\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ et $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})$

Propriétés 3 : Les propriétés du produit scalaire

Quels que soit les vecteurs $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$ et le nombre réel k on a :

- $\vec{v}.\vec{u}=\vec{u}.\vec{v}$ on dit que le produit scalaire **est symétrique.**
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ et $\vec{u}.(k\times\vec{v})=k\times(\vec{u}.\vec{v})$ on dit que le produit scalaire **est linéaire.**
- $\vec{u}.\vec{u}\geq 0$ et l'égalité $\vec{u}.\vec{u}=0$ n'ayant lieu que pour $\vec{u}=\vec{0}$.

Exemple 3 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que : $\|\vec{u}\|=2,\ \|\vec{v}\|=3$ et $(\overline{\vec{u};\vec{v}})\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Calculer $\vec{u}.\vec{v},\ \vec{u}^2,\ \vec{v}^2$ et $(2\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\frac{3}{2}\vec{v})$.

Remarque 2 :

Il découle des propriétés 3 que le comportement du produit scalaire par rapport à l'addition des vecteurs et leur multiplication par un nombre réel suit des règles analogues à celles de la multiplication des nombres.
On retiendra en particulier certains produits scalaires remarquables (par analogie avec les identités remarquables)

Propriétés 4 : Les identités remarquables

Quels que soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan on a :

- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(\vec{u}+\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2+2\times\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=(\vec{u}-\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2-2\times\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

Exemple 4 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que : $\|\vec{u}\|=7$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\vec{u}.\vec{v}=-2$.

1) a) Calculer $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$

b) En déduire la valeur de $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ et de $\|\vec{u}-\vec{v}\|$

2) Vérifier que $\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\| \geq \|\vec{u}+\vec{v}\|$ et que $\|\vec{u}-\vec{v}\| \geq \|\vec{u}\|-\|\vec{v}\|$

3) Vérifier que $\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| \geq |\vec{u}.\vec{v}|$

Propriété 5 : Résultat des identités remarquables

- $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$;
- $\vec{u}.\vec{v}=-\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}+\vec{v}\|^2\right)$

Exemple 5 :

Montrer que quels que soit les points A, B et C du plan on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

Propriétés 6 et définition 3 :

- Quels que soit les points A, B et C du plan on a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$
- On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si $\vec{u}.\vec{v}=0$ et on écrit $\vec{u}\perp\vec{v}$
- Deux droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$

Exemple 6 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux du plan tels que : $\|\vec{u}\|=4$ et $\|\vec{v}\|=5$

Déterminer le réel a sachant que : $\left(a\times\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=13$.

Exemple 7 :

Soit ABC un triangle tel que $AB=1$, $AC=\sqrt{2}$ et $cos(B\hat{A}C)=\frac{-1}{2\sqrt{2}}$

1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et déduire la valeur de BC.

2) Soit D le point tel que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$, montrer que le triangle ABD est rectangle en A.

Exercices : Exercices 3 et 4 de la série 13.

3) Théorème d'Al-Kashi

Activité 3 : Soit ABC un triangle.

1) Vérifier que $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ et déduire que $\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}^2$

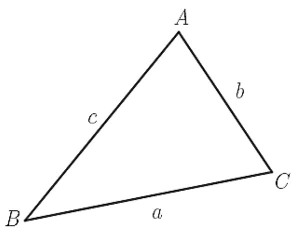
2) En déduire que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$ et $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times cos(B\hat{A}C)$

$\rightarrow$ Cette dernière égalité est appelé le **théorème d'Al-Kashi.**

Théorème 1 : Théorème d'Al-Kashi

Quel que soit le triangle ABC on a :

- $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times cos(B\hat{A}C)$
- $CA^2=BC^2+BA^2-2BC\times BA\times cos(C\hat{B}A)$
- $AB^2=CA^2+CB^2-2CA\times CB\times cos(A\hat{C}B)$



Propriété 7 : Résultat du théorème d'Al-Kashi

Quel que soit le triangle ABC on a :

$cos(B\hat{A}C)=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\times AC}$; $cos(C\hat{B}A)=\frac{BC^2+BA^2-CA^2}{2BC\times BA}$; $cos(A\hat{C}B)=\frac{CA^2+CB^2-AB^2}{2CA\times CB}$

Exemple 8 :

1) ABC un triangle tel que $AB = 2$, $AC = \sqrt{3}$ et $B\hat{A}C = \frac{\pi}{6}$. Calculer BC.

2) ABC un triangle tel que $AB = 1$, $AC = \sqrt{2}$ et $BC = 2$.

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $cos(B\hat{A}C)$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}$.

Exercices : Exercices 5 et 6 de la série 13.

4) Théorème de la médiane

Activité 4 : Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$.

Soit M un point du plan.

1) En écrivant $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$ vérifier que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

2) En déduire que $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AB}$

3) En déduire que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$ et $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$

Propriété 8 : La propriété caractéristique du milieu d'un segment :

Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$.

Pour tout point M du plan on a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

Théorème 2 : Théorème de la médiane :

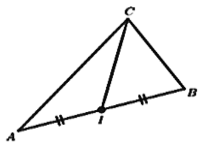
Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$.

Pour tout point M du plan on a : $\begin{cases} MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 \\ MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 \end{cases}$

Remarque 3 :

La troisième égalité du théorème de la médiane permet de calculer la médiane d'un triangle en fonction de ses côtés.

Dans cette égalité on pose $M = C$ on obtient : $CI^2 = \frac{1}{2}\left(CA^2 + CB^2 - \frac{1}{2}AB^2\right)$



Exemple 9 :

ABC un triangle et I , J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

1) Sachant que $AB = 4$, $BC = 8$ et $CA = 5$, calculer les distances CI , AJ et BK .

2) En utilisant le théorème de la médiane calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AB}$.

3) Calculer par deux méthodes le produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

Propriété 9 : Les ensembles des points usuels du plan

Soit A et B deux points distinct du plan et R un réel strictement positif.

L'ensemble des points M du plan tel que	Nature
$MA = R$	Le cercle du centre A et de rayon R
$MA = 0$	Le singleton $\{A\}$
$MA = -R$	L'ensemble vide
$MA = MB$	La médiatrice de segment $[AB]$

Exemple 10 :

A et B deux points du plan tel que $AB = 4$.

En utilisant le théorème de la médiane déterminer l'ensemble des points M du plan dans les cas suivants :

1) $MA^2 + MB^2 = 16$; 2) $MA^2 + MB^2 = 8$; 3) $MA^2 + MB^2 = 0$

4) $MA^2 - MB^2 = 0$; 5) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 5$; 6) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

Exercices : Exercices 7 et 8 de la série 13.

5) Les relations métriques dans un triangle rectangle

Activité 5 :

Soit ABC un triangle et H le projeté orthogonal de A sur (BC).

1) Vérifier que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right)$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$

2) a) En déduire que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ équivalent à $BA^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} \geq 0$

b) En déduire que : ABC est un triangle rectangle en A équivalent à $BA^2 = BH \times BC$.

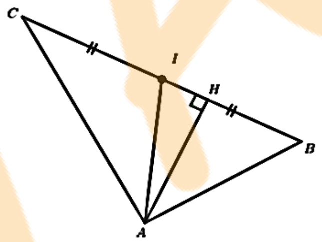
Propriétés 10 : Les relations métriques dans un triangle rectangle

Soit ABC un triangle.

I est le milieu du segment $[BC]$ et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :

- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Théorème de Pythagore)
- $BA^2 = BH \times BC$ ou $CA^2 = CH \times CB$
- $HA^2 = HC \times HB$
- $AI = \frac{1}{2} BC$

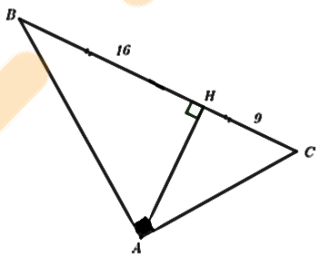


Exemple 11 :

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) tel que :

$BH = 16$ et $CH = 9$

Calculer les distances BC, BA, CA et HA



Complément de cours : Formule de Héron

L'aire d'un triangle de côtés a, b, c et de demi-périmètre p est : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Exercice : Exercice 9 de la série 13.

Pour la recherche :

- Le lien entre le produit scalaire et le travail d'une force en physique.
- L'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Minkowski.
- Théorème de Ménélaüs et Théorème de Céva.

Résumé 13 : Produit scalaire

Définition du produit scalaire :

- Le **produit scalaire** des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le nombre réel noté $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ défini par :

→ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC$

→ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens contraire alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AC$

→ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$ où C' est le projeté orthogonal du point C sur (AB)

La formule trigonométrique du produit scalaire :

- Quel que soit les points A, B et C du plan on a :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cos(B\hat{A}C)$

- Quel que soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan on a : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\alpha)$ ou α est une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

Autre formule du produit scalaire :

- Quel que soit les points A, B et C du plan on a :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$

- Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est le nombre réel $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$ où C' et D' sont les projetés orthogonaux des points C et D sur la droite (AB) respectivement.

Les propriétés du produit scalaire :

Quels que soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $k \in \mathbb{R}$ on a :

- $\vec{v}.\vec{u} = \vec{u}.\vec{v}$
- $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ et $\vec{u}.\left(k\times\vec{v}\right) = k \times \left(\vec{u}.\vec{v}\right)$
- $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u}$, $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ et $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$
- $\vec{u}.\vec{u} \geq 0$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$
- $\vec{u}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Les identités remarquables :

- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\times\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\times\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}-\vec{v}\right) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Théorème d'Al-Kashi :

Quel que soit le triangle ABC on a :

- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times cos(B\hat{A}C)$
- $CA^2 = BC^2 + BA^2 - 2BC \times BA \times cos(C\hat{B}A)$
- $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \times CB \times cos(A\hat{C}B)$

Autres résultats

- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$
- $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$
- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u}.\vec{v} = -\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}+\vec{v}\|^2\right)$
- Quel que soit le triangle ABC on a :

$cos(B\hat{A}C) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC}$

La propriété caractéristique du milieu d'un segment

- Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$

Pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

Théorème de la médiane :

- Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$. Pour tout point M du plan

on a : $\begin{cases} MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 \\ MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 \end{cases}$

- La troisième égalité du théorème de la médiane permet de calculer la médiane d'un triangle ABM .

Les relations métriques dans un triangle rectangle :

Soit ABC un triangle. I est le milieu de $[BC]$ et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :

- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Théorème de Pythagore)
- $BA^2 = BH \times BC$ ou $CA^2 = CH \times CB$
- $HA^2 = HC \times HB$
- $AI = \frac{1}{2}BC$

Formule de Héron :

- L'aire d'un triangle de côtés a, b, c et de demi-périmètre p est : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Exercice 1

Calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$:

1) $\|\vec{u}\|=\sqrt{3}$, $\|\vec{v}\|=4$ et $\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

2) $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=1$ et $\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

3) $\|\vec{u}\|=\sqrt{2}$, $\|\vec{v}\|=\frac{1}{2}$ et $\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

4) $\|\vec{u}\|=4$, $\|\vec{v}\|=2$ et $\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)\equiv\frac{3\pi}{2}[2\pi]$

Exercice 2

1) Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB=4$. Calculer par deux méthodes $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2) Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $BC=6$. Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$.

3) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
Déterminer les mesures possibles de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ sachant que :
$\|\vec{u}\|=4$, $\|\vec{v}\|=\sqrt{2}$ et $\vec{u}.\vec{v}=-2\sqrt{6}$

Exercice 3

Soit ABC un triangle tels que :
$AB=1$, $AC=3$ et $B\hat{A}C=\frac{2\pi}{3}$

1) Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\frac{3}{2}$

2) Soit E le point du plan tel que $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$

a) Montrer que $\overrightarrow{AE}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

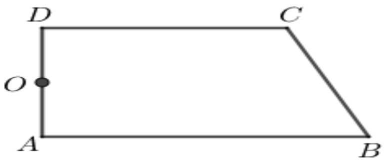
b) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$

c) Soit I le milieu du segment $[AB]$.
Montrer que $(AB)\perp(IE)$

Exercice 4

$ABCD$ est un trapèze rectangle en A et en D.
O est le milieu de $[AD]$

On pose $AB=a$, $DC=b$ et $AD=c$



1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD}$

2) En écrivant $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$.
Montrer que $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}=ab-\frac{c^2}{4}$

Exercice 5

1) ABC est un triangle tel que :
$AB=3$, $AC=5$ et $\hat{A}=\frac{\pi}{4}$. Calculer BC.

2) MNP est un triangle tel que :
$MN=\sqrt{3}$, $NP=2$ et $\hat{N}=\frac{5\pi}{6}$. Calculer MP.

Exercice 6

ABC est un triangle $AB=6$, $AC=5$ et $BC=7$

1) En utilisant le théorème d'Al-Kashi montrer que :
$cos(\hat{A})=\frac{1}{5}$.

2) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ puis déduire $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=30$.

3) Soit H le projeté de A sur (BC).
Calculer la distance : BH

Exercice 7

ABC un triangle tel que $AB=6$, $AC=4$ et $BC=5$
Soit I le milieu du segment $[BC]$, Calculer AI

Exercice 8

ABM un triangle, I, J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[AM]$ et $[BM]$.
Sachant que $AB=4$, $AM=3$ et $BM=4$ calculer les distances MI, AK et BJ.

Exercice 9

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) tel que
$AH=4$ et $A\hat{B}C=\frac{\pi}{6}$.

Calculer les distances BA, CA, BC, BH et CH

Exercice 10 : Exercice d'olympiade

Soit a, b et c trois réels strictement positifs.
Montrer que :
$\sqrt{a^2+b^2-ab}+\sqrt{b^2+c^2-bc}\geq\sqrt{c^2+a^2-ca}$

Indications :
Considérons un quadrilatère $ABCD$ tel que
$A\hat{D}B=\frac{\pi}{3}$ et $B\hat{D}C=\frac{\pi}{3}$
On pose $AD=a$, $BD=b$ et $DC=c$

1) Construire une figure.

2) Calculer AB et BC en fonction de a, b et c

3) En déduire que :
$\sqrt{a^2+b^2-ab}+\sqrt{b^2+c^2-bc}\geq\sqrt{c^2+a^2-ca}$

Correction : https://drive.google.com/file/d/1gwKeGSTyrkmGFS7c1yzr36pBrrMIGD0I/view?usp=sharing

Prof : Aissa HIYAB
Niveau : TCSF

Série 13
Produit scalaire

Lycée : Abdellah Chafchaouni
Matière : Mathématique

Exercice 11 : La loi des sinus

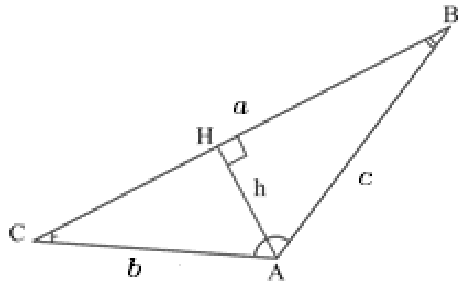
On considère un triangle ABC et on désigne par H le pied de la hauteur issue de A.

On note $AH = h$, $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.

1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}$.

b) En déduire que $c \times sin(B) = b \times sin(C)$.

2) Montrer que $\frac{a}{sin(A)} = \frac{b}{sin(B)} = \frac{c}{sin(C)}$.



Exercice 12 : Inégalité d'Euler.

Soit ABC un triangle.

On pose $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ et $p = \frac{a+b+c}{2}$

Soit $X, Y, Z \in \mathbb{R}$ tel que :

$X = 2(p-a)$, $Y = 2(p-b)$ et $Z = 2(p-c)$

1) Vérifier que X, Y et Z sont strictement positif.

2) Vérifier que $X + Y = 2c$, $Y + Z = 2a$ et $Z + X = 2b$

3) En déduire que $abc \geq 8(p-a)(p-b)(p-c)$ (Rappel : pour tout réels $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ on a $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$)

4) On note R et r les rayons des cercles circonscrit et inscrit au triangle ABC respectivement.

a) En utilisant la formule de Héron, déduire que $R \geq 2r$

Cette inégalité est appelée : inégalité d'Euler.

b) Montrer que $p^3 \geq 27(p-a)(p-b)(p-c)$ (Rappel : pour tout réels $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ on a $(x+y+z)^3 \geq 27xyz$)

c) En utilisant la formule de Héron, déduire que $p \geq 3\sqrt{3}r$

Exercice 13 : Exercice d'olympiade

Soit ABC un triangle, on pose

$BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ et $p = \frac{a+b+c}{2}$

R et r sont les rayons des cercles circonscrit et inscrit au triangle ABC respectivement.

1) En utilisant la formule de Héron montrer que :

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Et $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

2) On pose $B\hat{A}C = A$, $C\hat{B}A = B$ et $A\hat{C}B = C$

En utilisant le théorème d'Al-Kashi montrer que :

$$cos(A)cos(B)cos(C) = \frac{p^2 - (2R+r)^2}{4R^2}$$

3) En déduire que le triangle ABC est rectangle si et seulement si $p = 2R + r$

Exercice 14

Soit ABC un triangle, on note O et R le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

On pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$

Soit H le point tel que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

1) Montrer que :

$2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 2R^2 - a^2$, $2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} = 2R^2 - b^2$ et

$2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 2R^2 - c^2$

2) a) Montrer que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et déduire que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$ tel que A' est le milieu du segment $[BC]$

b) En déduire que $(AH) \perp (BC)$

3) a) Montrer que $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et déduire que $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{OB'}$ tel que B' est le milieu du segment $[CA]$

b) En déduire que $(BH) \perp (CA)$

4) En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC

5) En déduire que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ où G est le centre de gravité du triangle ABC

6) Montrer que $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ et déduire que $OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$

Exercice 15 : Exercice d'olympiade

O, G, H et I désignes respectifs le centre du cercle circonscrit, le centre du gravité, l'orthocentre et le centre du cercle inscrit d'un triangle ABC.

On pose $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ et $p = \frac{a+b+c}{2}$

R et r sont les rayons des cercles circonscrit et inscrit au triangle ABC respectivement.

1) a) Montrer que $OI^2 = R^2 - 2Rr$

b) En déduire que $R \geq 2r$

2) Montrer que $OH^2 = R^2 - 2p^2 + 2(2R+r)^2$

3) a) Montrer que $IH^2 = 2r^2 - p^2 + (2R+r)^2$

b) En déduire que $OH \geq \sqrt{2} \times IH$

4) Montrer que $IG^2 = \frac{1}{9}\left(p^2 - 16Rr + 5r^2\right)$

5) Déduire que $\sqrt{16Rr - 5r^2} \leq p \leq \sqrt{2r^2 + (2R+r)^2}$

Correction :

https://drive.google.com/file/d/1gwKeGSTyrkmGFS7c1yzr36pBrrMIGD0I/view?usp=sharing