12

Fonctions numériques

الأستاذ عيسى هياب

1) Généralités

1-1 Fonction numérique d'une variable réelle

Activité 1 :

Pour une personne de taille x en cm, la relation qui nous donne sa masse idéale $f(x)$ en kg est donnée par :

$$f(x)=x-100-\frac{x-150}{4}$$

1) Montrer que $f(x)=\frac{3}{4}x-\frac{125}{2}$ puis en déduire la nature de la relation (ou la fonction) qui lie x et $f(x)$.

2) Calculer la masse idéale dans les cas suivants : $x=158cm$; $x=164cm$; $x=182cm$

3) Déterminer la taille de la personne dont la masse idéale est $71kg$

4) Montrer algébriquement que l'équation $f(x)=-80,5$ n'a pas de solution dans l'ensemble $D=]0;300[$ puis donner une explication de ce résultat.

Définition 1 :

Une fonction f est une relation qui, à chaque nombre réel x d'un ensemble D, associe au plus, un nombre réel y noté $f(x)$.

- Le nombre $f(x)$ est appelé **l'image** de x par la fonction f.
- Le nombre x, s'il existe tel que $f(x)=y$, s'appelle **antécédent** de y par la fonction f.

Application 1 :

Soit f et g les deux fonctions numériques de la variable réelle x définies par : $f(x)=\frac{\sqrt{5-x}}{x-2}$ et $g(x)=x^2+3$

1) Calculer si possible l'image des nombres réels 1 ; 4 ; -4 ; 6 et 2 par la fonction f.

2) Déterminer s'ils existent les antécédents des nombres 3 ; 4 et 2 avec la fonction g.

Remarques 1 :

- Une fonction f se note également par $f: x\mapsto f(x)$
- Pour déterminer les antécédents x d'un nombre b par la fonction f, on résout l'équation $f(x)=b$ d'inconnue x.

1-2 Ensemble de définition d'une fonction numérique

Définition 2 :

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle x.

L'ensemble de définition d'une fonction f, noté D ou D_f est l'ensemble des nombres réels x pour lesquels l'image $f(x)$ est calculable dans $\mathbb{R}$. On écrit $D_f=\{x\in\mathbb{R}\ /\ f(x)\in\mathbb{R}\}$

Remarques 2 :

- Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction numérique, il faut se limiter aux nombres réels dont le dénominateur est différent de zéro et ce qui est à l'intérieur de la racine est positif…
- On dit qu'une fonction numérique est définie sur I si I est une partie de D_f.

Propriété 1 : Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes ;

La fonction f	Ensemble de définition
$f=$ Polynôme	$D_f=\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f=\{x\in\mathbb{R}\ /\ Q(x)\neq 0\}$
$f(x)=\sqrt{P(x)}$	$D_f=\{x\in\mathbb{R}\ /\ P(x)\geq 0\}$
$f(x)=\frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f=\{x\in\mathbb{R}\ /\ Q(x)>0\}$

Rappel

Soit a un nombre réel, on a :

- $\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\geq a\}=[a;+\infty[$;
- $\{x\in\mathbb{R}\ /\ x>a\}=]a;+\infty[$;
- $\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\leq a\}=]-\infty;a]$;
- $\{x\in\mathbb{R}\ /\ x<a\}=]-\infty;a[$;
- $\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\neq a\}=\mathbb{R}\setminus\{a\}=]-\infty;a[\cup]a;+\infty[$

Exemple 1

Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

$$f(x)=x^2-4x+3 \ ; \quad f(x)=\frac{-x-6}{x+3} \quad ; \quad f(x)=\sqrt{4x-2} \quad ; \quad f(x)=\frac{-x-6}{\sqrt{7-x}}$$

- Pour $f(x)=x^2-4x+3$ on a $D_f=\mathbb{R}$ car f est une fonction polynomiale.
- Pour $f(x)=\dfrac{-x-6}{x+3}$ on a $D_f=\{x\in\mathbb{R}\ /\ g(x)\in\mathbb{R}\}=\{x\in\mathbb{R}\ /\ \dfrac{-x-6}{x+3}\in\mathbb{R}\}=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x+3\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\neq -3\}=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$
- Pour $f(x)=\sqrt{4x-2}$ on a $D_f=\{x\in\mathbb{R}\ /\ h(x)\in\mathbb{R}\}=\{x\in\mathbb{R}\ /\ \sqrt{4x-2}\in\mathbb{R}\}=\{x\in\mathbb{R}\ /\ 4x-2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\geq\dfrac{1}{2}\}=\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$
- Pour $f(x)=\dfrac{-x-6}{\sqrt{7-x}}$ on a $D_f=\{x\in\mathbb{R}\ /\ k(x)\in\mathbb{R}\}=\{x\in\mathbb{R}\ /\ \dfrac{-x-6}{\sqrt{7-x}}\in\mathbb{R}\}=\{x\in\mathbb{R}\ /\ 7-x>0\}=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x<7\}=\left]-\infty;7\right[$

Application 2 :

Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

$$f(x)=\sqrt{x-1} \ ; \ f(x)=\frac{1}{x-1} \ ; \ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}} \ ; \ f(x)=\frac{2x+3}{x^2-x-2} \ ; \ f(x)=\sqrt{x^2-x-2} \ ; \ f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x-3} \ ; \ f(x)=\sqrt{x^2+1}$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{|x|}}{x^2+3} \ ; \ f(x)=\sqrt{7-x} \ ; \ f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-1}} \ ; \ f(x)=\frac{2x+1}{x^2-1} \ ; \ f(x)=\frac{3x+1}{x\sqrt{x+1}} \ ; \ f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x+3} \ ; \ f(x)=tan(x)$$

1-3 Egalité de deux fonctions

Définition 3 :

Soient f et g deux fonctions. D_f et D_g sont leurs ensembles de définition respectifs.

On dit que f et g sont **égales**, et on écrit $f=g$, si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $D_f=D_g$
- $f(x)=g(x)$ pour tout x de D_f

Exemple 2 :

On considère les deux fonctions f et g définies par : $f(x)=\sqrt{x^2}$ et $g(x)=|x|$

- On a $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}$, donc $D_f=D_g$
- Pour tout x de D_f, on a : $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|=g(x)$ alors $f=g$ et donc les deux fonctions f et g sont égales.

Application 3 :

Déterminer si les deux fonctions f et g sont égales dans les cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2}$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$; 2) $f(x)=\sqrt{(x+1)^2}$ et $g(x)=x+1$

3) $f(x)=x+1$ et $g(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$; 4) $f(x)=sin(x)$ et $g(x)=cos(x)\times\dfrac{sin(x)}{cos(x)}$

1-4 Représentation graphique d'une fonction numérique

Activité 2 :

On considère la fonction numérique f définie par $f(x)=2x+1$

Construire le graphe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Définition 4 :

- Dans un plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ **la courbe représentative** d'une fonction f, notée souvent $(\mathcal{C}_f)$, est l'ensemble des points du plan $M(x;f(x))$ où x parcourt D_f l'ensemble de définition de la fonction f.
- Autrement dit : $M(x,y)\in(\mathcal{C}_f)\Leftrightarrow x\in D_f$ et $y=f(x)$

Remarque 3 :

L'équation $y=f(x)$ est appelée **l'équation de la courbe** $(\mathcal{C}_f)$.

Application 4 :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Déterminer les points appartenant à $(\mathcal{C}_f)$ parmi les points suivants : $O(0;0)$; $A(-1;1)$; $B(3;\dfrac{9}{4})$; $C(2;4)$

2) Fonction paire - Fonction impaire

2-1 Fonction paire

Activité 3 :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=|x|-1$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Soit $x\in\mathbb{R}$, montrer que $f(-x)=f(x)$

3) Vérifiez que $\begin{cases} f(x)=x-1 & si \quad x\geq 0 \\ f(x)=-x-1 & si \quad x\leq 0 \end{cases}$

4) En déduire la nature de la courbe $(\mathcal{C}_f)$, puis tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

5) En déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet un axe de symétrie à déterminer.

Définition 5 : Soit D une partie de $\mathbb{R}$.

On dit que D est **symétrique par rapport à zéro** si pour tout $x\in D$ on a $-x\in D$.

Exemple 3 :

Déterminer les parties symétriques par rapport à zéro parmi les parties suivantes :

$[-2;2]$; $[-2;1]$; $[-3;-2]\cup[2;4]$; $]2;9[$; $\mathbb{R}$; $\{-2;5;7;2;-7;-5:0\}$; $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$; $\mathbb{R}^*$; $[-3;-2]\cup[2;3]$; $]-1;1[$; $[0;+\infty[$; $\{-2;5;7;2;-7;0\}$

Remarques 4 :

- L'ensemble de définition de la fonction tangente : $x\mapsto tan(x)$ est $D_{tan}=\{\mathbb{R}\setminus\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\}$
- Pour tout $x\in D_{tan}$ on a $-x\in D_{tan}$
- Pour tout $x\in D_{tan}$ on a $\pi+x\in D_{tan}$

Définition 6 :

Soit f une fonction numérique et D_f son domaine de définition.

On dit que f est une **fonction paire** si :

- D_f est symétrique par rapport à zéro ;
- Pour tout $x\in D_f$: $f(-x)=f(x)$

Application 5 :

Déterminer si f est une fonction paire dans les cas suivants :

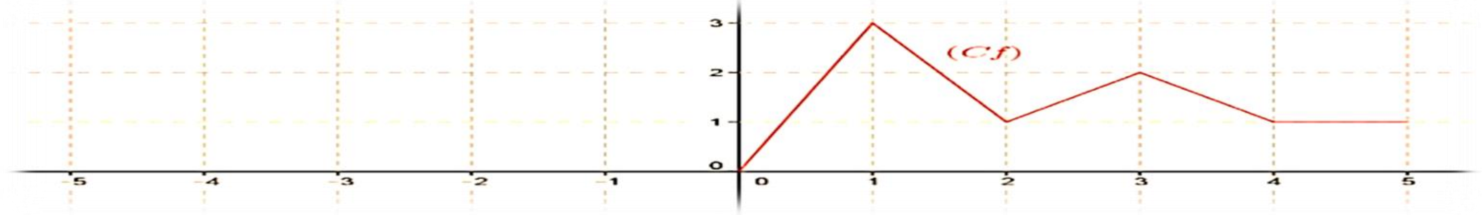
$f(x)=|x|-\dfrac{1}{x^2}$; $f(x)=\sqrt{x}+1$; $f(x)=cos(x)$; $f(x)=3x^2+2x-4$

Propriété 2 :

La courbe d'une fonction paire dans un repère orthogonal est symétrique par-rapport à l'axe des ordonnées.

Application 6 :

Compléter la courbe suivant sachant que la fonction f est paire :



2-2 Fonction impaire

Activité 4 :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=2x$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

2) Soit $x\in\mathbb{R}$, montrer que $f(-x)=-f(x)$

3) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ puis vérifier que $(\mathcal{C}_f)$ est symétrique par-rapport à l'origine du repère.

Définition 7 :

Soit f une fonction numérique et D_f son domaine de définition.
On dit que f est une **fonction impaire** si :

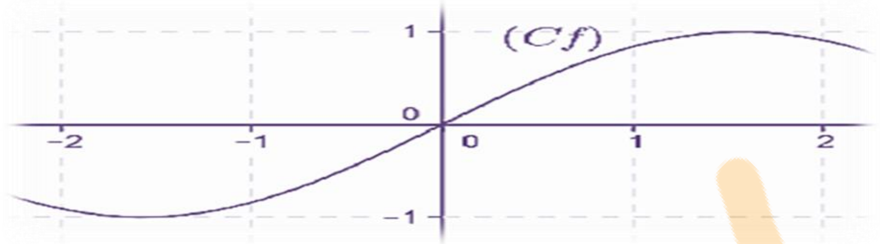
- D_f est symétrique par rapport à zéro ;
- Pour tout $x\in D_f$: $f(-x)=-f(x)$

Application 7 : Déterminer si f est une fonction impaire dans les cas suivants :

$f(x)=\frac{2}{x}$; $f(x)=x^2+x+1$; $f(x)=sin(x)$; $f(x)=tan(x)$

Propriété 3 :

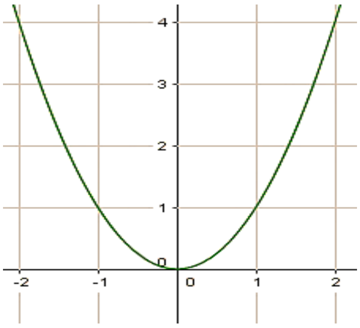
La courbe d'une fonction impaire dans un repère orthogonal est symétrique par- rapport à l'origine du repère.



3) Variations d'une fonction numérique

3-1 Définitions

Activité 5 :



Soit f la fonction numérique représentée graphiquement dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ ci-contre :

1) Déterminer puis comparer $f(-2)$ et $f(-1)$.

2) Comment les valeurs de $f(x)$ change lorsque les valeurs de x augmentes sur $[-2;0]$?

3) Déterminer puis comparer $f(2)$ et $f(1)$.

4) Comment les valeurs de $f(x)$ change lorsque les valeurs de x augmentes sur $[0;2]$?

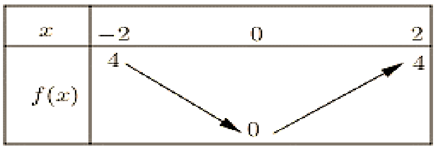
Définition 8 :

Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans son ensemble de définition. On dit que :

- f est **croissante** sur I si pour tous nombres x et y de I : si $x<y$, alors $f(x)\leq f(y)$.
- f est **strictement croissante** sur I si pour tous nombres x et y de I : si $x<y$, alors $f(x)<f(y)$.
- f est **décroissante** sur I si pour tous nombres x et y de I : si $x<y$, alors $f(x)\geq f(y)$.
- f est **strictement décroissante** sur I si pour tous nombres x et y de I : si $x<y$, alors $f(x)>f(y)$.
- f est **constante** sur I si pour tous nombres x et y de I on a $f(x)=f(y)$.

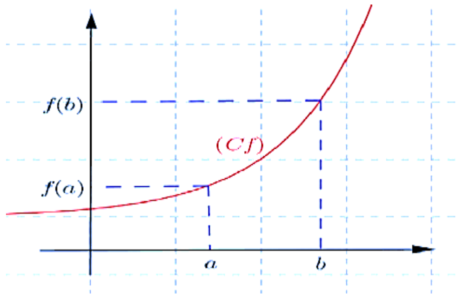
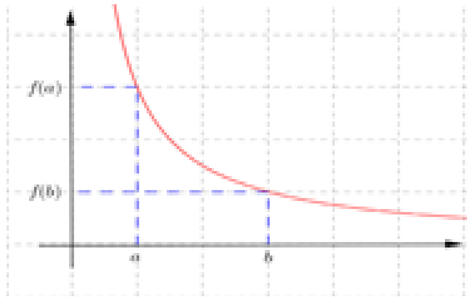
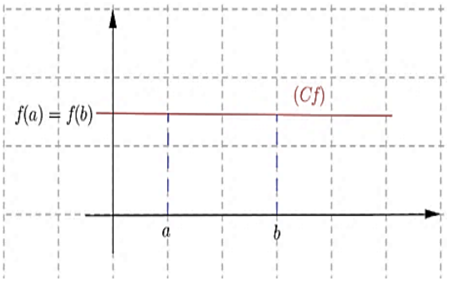
Remarques 5 :

- Une fonction est dite monotone sur un intervalle I, si elle est croissante ou décroissante sur I.
- Une fonction est dite strictement monotone sur un intervalle I, si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.
- En général on résume les variations d'une fonction dans un tableau appelé **tableau de variations** où on indique par une flèche « vers le haut » que la fonction est croissante et par une flèche « vers le bas » que la fonction est décroissante.
- Dans l'activité précédente, on a f est décroissante sur l'intervalle $[-2;0]$ et croissante sur l'intervalle $[0;2]$. Donc le tableau de variations de f est le suivant :



x	-2		0		2
$f(x)$	4	↘	0	↗	4

Interprétations géométriques :

 f est croissante sur $[a;b]$	 f est décroissante sur $[a;b]$	 f est constante sur $[a;b]$

Exemple 4 :

On considère les fonctions numériques f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x+4$ et $g(x)=x^2+1$

1) Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

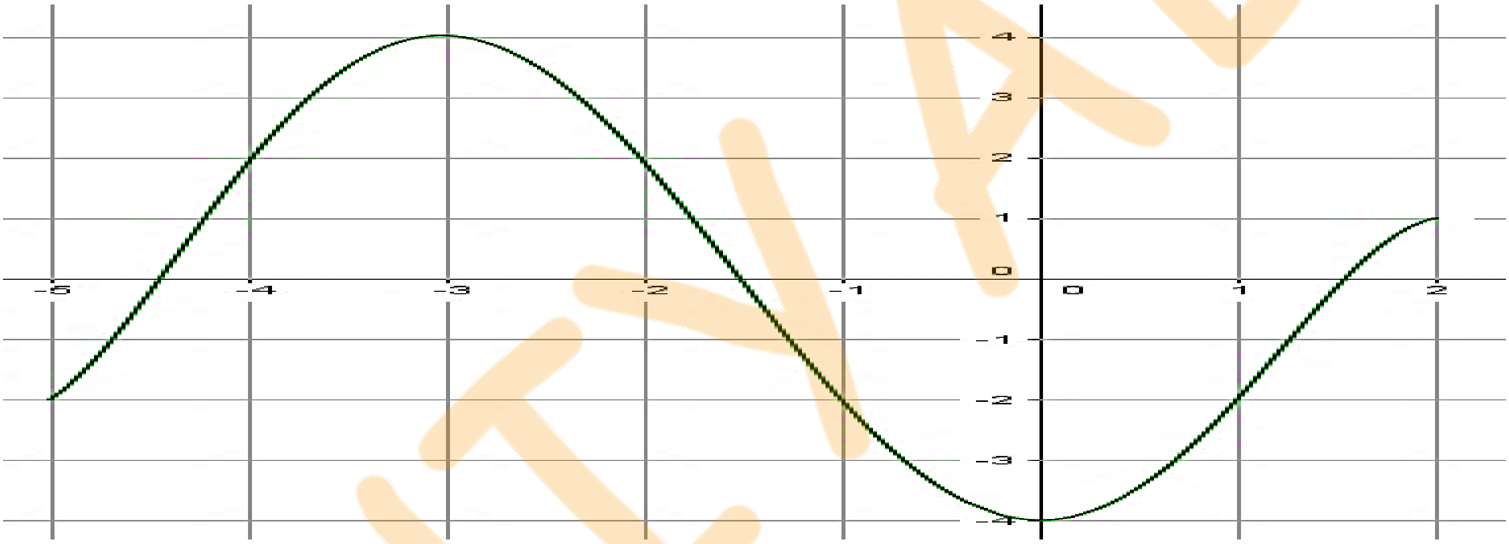
2) Etudier les variations de la fonction g sur les intervalles $[0;+\infty[$ et $]-\infty;0]$

3) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$

4) Comparer sans calcul $g(-2)$ et $g(-3)$

Application 8 :

La courbe ci-dessous représente la courbe d'une fonction numérique f dans un repère orthogonal :



1) Déterminer graphiquement les réels qui ont une image par la fonction f, puis déduire son ensemble de définition.

2) Dresser le tableau de variations de f sur D_f .

3-2 Taux de variation

Définition 9 :

Soient f une fonction numérique, D_f son ensemble de définition, x et y deux nombres distincts de D_f .

Le nombre $T=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ est appelé **taux de variation** de f entre x et y.

Exemple 5 : Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x-1$

Le taux de variation de f entre deux réels distincts x et y est $T=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\dfrac{(3x-1)-(3y-1)}{x-y}=\dfrac{3x-3y}{x-y}=\dfrac{3(x-y)}{x-y}=3$

Propriété 4 :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I ($I\subset D_f$). x et y sont deux éléments distincts de I.

T est le taux de variation de f entre x et y.

- Si $T\geq 0$ pour tous x et y de I, alors f est croissante sur I.
- Si $T>0$ pour tous x et y de I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $T\leq 0$ pour tous x et y de I, alors f est décroissante sur I.
- Si $T<0$ pour tous x et y de I, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si $T=0$ pour tous x et y de I, alors f est constante sur I.

Exemple 6 : On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-4x+3$

1) Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}$. Montrer que $f(x)-f(y)=(x-y)(x+y-4)$

2) En déduire que le taux de variation de la fonction f entre deux éléments distincts x et y de $\mathbb{R}$ est $T=x+y-4$

3) En utilisant le taux de variation, étudier les variations de f sur les intervalles $[2;+\infty[$ et $]-\infty;2]$

4) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Application 9 : On considère la fonction numérique f définie par $f(x)=\dfrac{-x+2}{x-1}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Soit x et y deux éléments de D_f. Montrer que $f(x)-f(y)=\dfrac{-(x-y)}{(x-1)(y-1)}$

3) En déduire que le taux de variation de la fonction f entre deux éléments distincts x et y de D_f est $T=\dfrac{-1}{(x-1)(y-1)}$

4) Etudier les variations de f sur les intervalles $]1;+\infty[$ et $]-\infty;1[$

5) Dresser le tableau de variations de f.

3-3 Variations et parité

Propriété 5 :

Soit f une fonction numérique telle que son domaine de définition D_f est symétrique par rapport à 0 .

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}^+$ inclus dans D_f et J le symétrique de I par rapport à 0 $(J=\{-x/\ x\in I\})$.

→ Dans le cas où f est paire, on a :

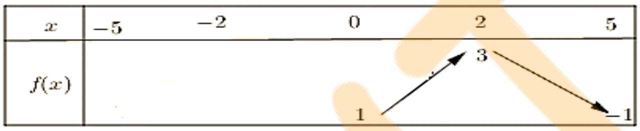
- Si f est croissante sur I, alors f est décroissante sur J.
- Si f est décroissante sur I, alors f est croissante sur J.

→ Dans le cas où f est impaire, on a :

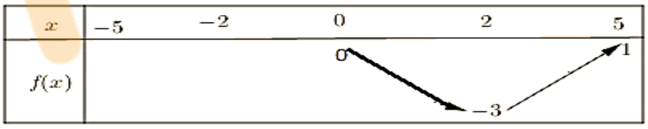
- f à le même sens de variations sur I et J.

Exemple 7 :

1) Compléter le tableau suivant sachant que f est paire



2) Compléter le tableau suivant sachant que f est impaire



Remarques 6 :

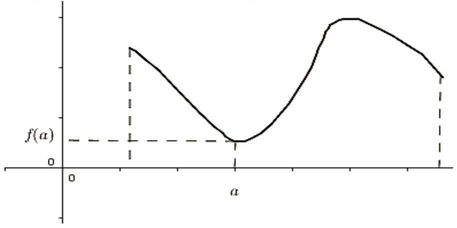
- Il suffit d'étudier les variations des fonctions paires et des fonctions impaires sur $D_E=D_f\cap\mathbb{R}^+$
- L'ensemble $D_E=D_f\cap\mathbb{R}^+$ est appelé **l'ensemble d'étude** (des fonctions paires et des fonctions impaires)

4) Valeur minimale et valeur maximale d'une fonction numérique

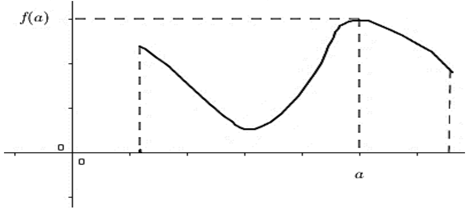
Définition 10 :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I. a et b sont deux nombres réels.

- On dit que $f(a)$ est **la valeur minimale** (ou le **minimum**) de f sur I si pour tout x de I on a : $f(x)\geq f(a)$.



- On dit que $f(a)$ est **la valeur maximale** (ou le **maximum**) de f sur I si pour tout x de I on a : $f(x)\leq f(a)$.



- On dit que $f(a)$ est un **extrémum** de f sur I si $f(a)$ est la valeur maximale ou la valeur minimale de f sur I .

Exemple 8 :

On considère la fonction numérique f définie par $f(x)=-x^2+1$

Montrons que $f(0)$ est la valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$

C'est-à-dire montrons que $f(x)\leq f(0)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$ on a $f(x)-f(0)=(-x^2+1)-(0^2+1)=-x^2$ et on sait que $-x^2\leq 0$ donc $f(x)-f(0)\leq 0$ C.Q.F.D

Propriété 6 :

- M valeur maximale de f sur $I \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\leq M \text{ pour tout } x\in I \\ l'\text{équation } f(x)=M \text{ admet au moins une solution dans } I \end{cases}$
- m valeur minimale de f sur $I \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq m \text{ pour tout } x\in I \\ l'\text{équation } f(x)=m \text{ admet au moins une solution dans } I \end{cases}$

Application 10 :

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ et $g(x)=x^2+6x+5$

1) a) Montrer que $f(x)\leq -2$ pour tout $x\in\left]-\infty;0\right[$

b) Résoudre dans $\left]-\infty;0\right[$ l'équation $f(x)=-2$

c) En déduire que -2 est la valeur maximale de f sur $\left]-\infty;0\right[$

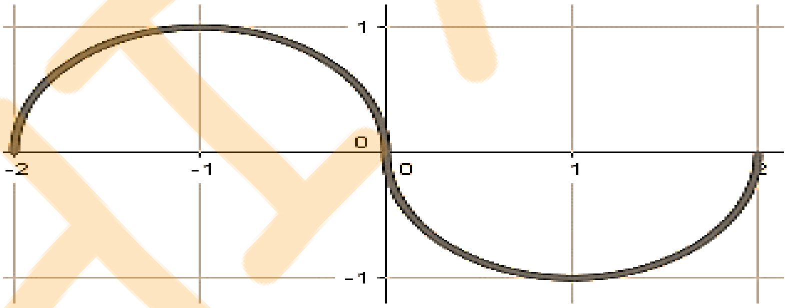
2) Montrer que -4 est la valeur minimale de g sur $\mathbb{R}$.

Remarques 7 :

- f admet une valeur maximale en a sur $I \Leftrightarrow f(a)$ valeur maximale de f sur I .
- f admet une valeur minimale en a sur $I \Leftrightarrow f(a)$ valeur minimale de f sur I .
- f admet un extrémum en a sur $I \Leftrightarrow f(a)$ valeur maximale ou valeur minimale de f sur I .

Application 11 :

Soit f la fonction numérique représenté sur un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ par la courbe $(\mathcal{C}_f)$ suivante :



1) Dresser le tableau de variations de f sur $[-2;2]$

2) La fonction f est-elle impaire ? justifier votre réponse.

3) Déterminer la valeur minimale et la valeur maximale de f sur $[0;2]$

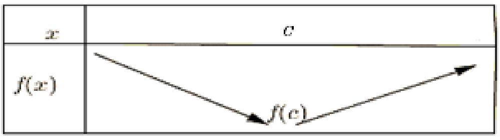
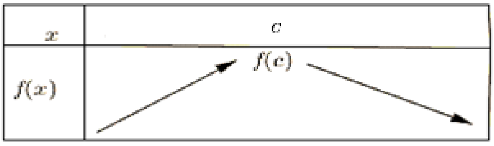
4) Déterminer trois intervalles dans lesquels la fonction admet une valeur maximale en -1.

Remarque 8 :

- Les extremums de f sur $I=D_f$ sont appelés valeur maximale globale (ou absolue) et valeur minimale globale (ou absolue).
- Les extremums de f sur $I\neq D_f$ sont appelés valeur maximale locale et valeur minimale locale.

Propriété 7 : Extremums et variations

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle et c un élément de I

• Si le tableau de variations de f sur I s'écrit :  Alors $f(c)$ est la valeur minimale de f sur I	• Si le tableau de variations de f sur I s'écrit :  Alors $f(c)$ est la valeur maximale de f sur I

5) Etude de la fonction $x \mapsto ax^2$

Activité 6 :

Soient a un nombre réel non nul, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2$.

1) Montrer que f est paire et déduire son ensemble d'étude D_E .

2) Montrer que le taux de variation de la fonction f entre deux éléments distincts x et y de $\mathbb{R}$ est $T = a(x+y)$

3) En déduire les variations de f sur D_E dans les cas $a > 0$ et $a < 0$
4) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ dans les cas $a > 0$ et $a < 0$
5) En déduire le cas dont la fonction f admet une valeur minimale et le cas dont f admet une valeur maximale

Activité 7 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

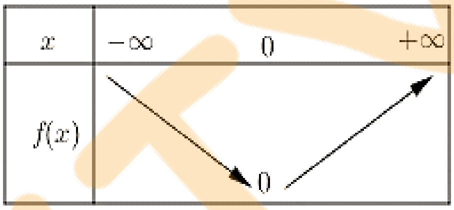
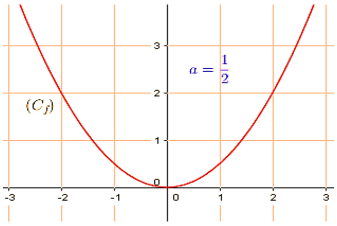
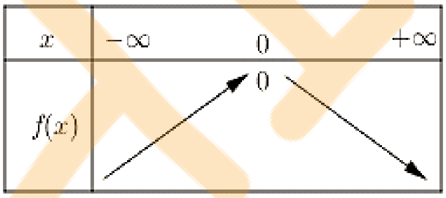
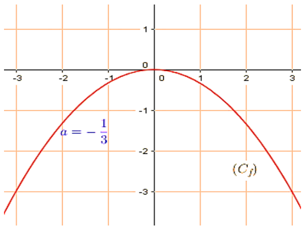
1) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (utiliser l'activité précédente)
2) Recopier et compléter le tableau des valeurs suivant :

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}$	2	3
$f(x)$							

3) Représenter les points $M(x; f(x))$ du tableau précédent dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et déduire l'allure de $(\mathcal{C}_f)$.

Définition 11 et propriété 8 :

Soit a un nombre réel non nul.
La courbe de la fonction $f : x \mapsto ax^2$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan est appelée **parabole** de **sommet** O et **d'axe de symétrie** la droite $y = 0$ (l'axe des ordonnées).

	Tableau de variations de f	La courbe $(\mathcal{C}_f)$
$a > 0$		
$a < 0$		

Exemple 9 :

Construire la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé dans les cas suivants : 1) $f(x) = \frac{1}{3}x^2$; 2) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$

6) Etude de la fonction $x \mapsto \frac{a}{x}$

Activité 8 :

Soient a un nombre réel non nul, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{a}{x}$

1) Montrer que f est impaire et déduire son ensemble d'étude D_E .

2) Montrer que le taux de variation de la fonction f entre deux éléments distincts x et y de $\mathbb{R}^*$ est $T = -\frac{a}{xy}$

3) En déduire les variations de f sur D_E dans les cas $a > 0$ et $a < 0$
4) Dresser le tableau de variations de f dans les cas $a > 0$ et $a < 0$

Activité 9 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$

1) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$ (utiliser l'activité précédente)

2) Recopier et compléter le tableau des valeurs suivant :

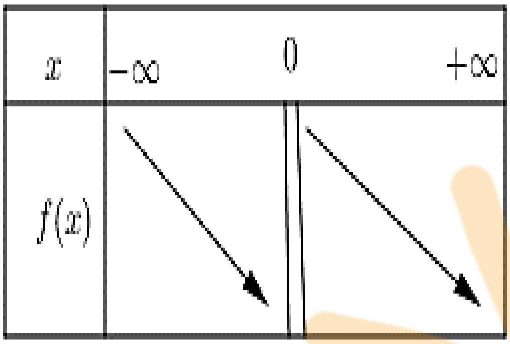
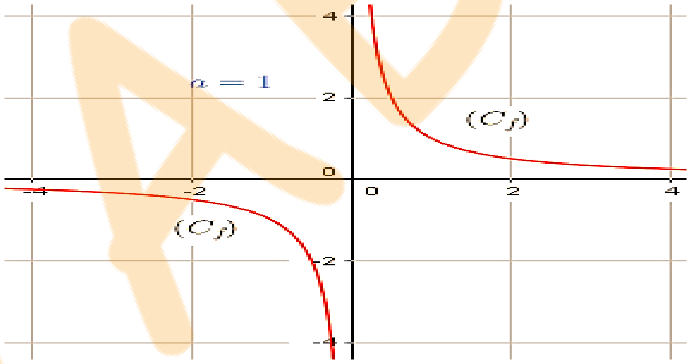
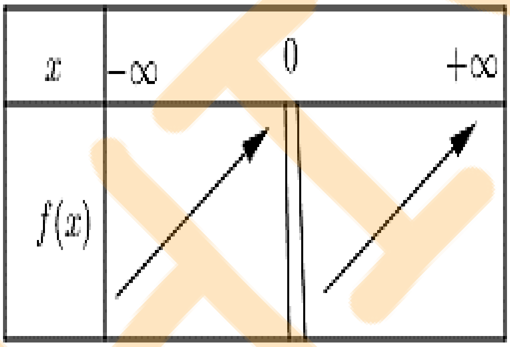
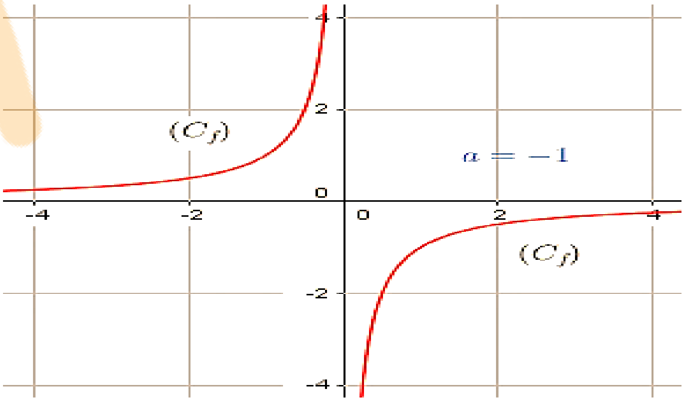
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4
$f(x)$							

3) Représenter les points $M(x;f(x))$ du tableau précédent dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et déduire l'allure de $(\mathcal{C}_f)$.

Définition 12 et propriété 9 :

Soit a un nombre réel non nul.

La courbe de la fonction $f:x\mapsto\dfrac{a}{x}$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan est appelée **hyperbole** de **centre** O et **d'asymptotes** les droites $x=0$ et $y=0$ (les axes du repère).

	Tableau de variations de f	La courbe $(\mathcal{C}_f)$
$a>0$		
$a<0$		

Exemple 10 :

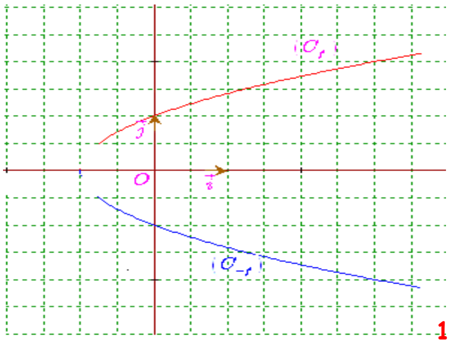
Construire la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé dans les cas suivants : 1) $f(x)=\dfrac{3}{x}$; 2) $f(x)=-\dfrac{2}{x}$

7) Représentation graphique des fonctions $x\mapsto -f(x)$, $x\mapsto f(x)+a$ et $x\mapsto f(x+a)+b$

Soit f une fonction numérique et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

7-1 Représentation graphique de la fonction $-f:\ x\mapsto -f(x)$

Remarque 9 :



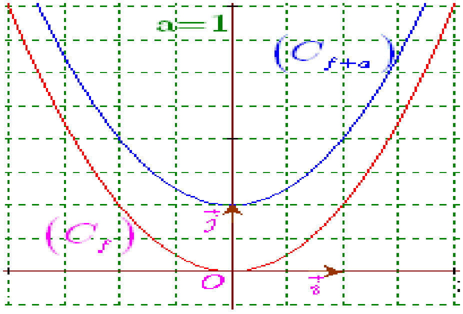
On a $M(x;f(x))\in(\mathcal{C}_f)\Leftrightarrow M'(x;-f(x))\in(\mathcal{C}_{-f})$

Donc $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{-f})$ sont symétriques par-rapport à l'axe des abscisses

Par conséquent, la courbe de fonction $x\mapsto -f(x)$ peut être dessiner à partir de la courbe de la fonction $x\mapsto f(x)$ en utilisant la symétrie axiale d'axe des abscisses.

7-2 Représentation graphique de la fonction $x \mapsto f(x)+a$

Remarque 10 :



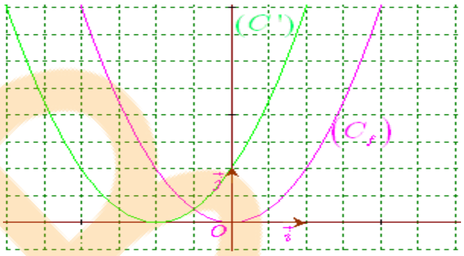
On a $M(x;f(x)) \in (\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow M'(x;f(x)+a) \in (\mathcal{C}_g)$

Donc $\overrightarrow{MM'}(0;a)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{MM'} = 0\vec{i} + a\vec{j} = a\vec{j}$

Par conséquent, la courbe de fonction $x \mapsto f(x)+a$ peut être dessiner à partir de la courbe de la fonction $x \mapsto f(x)$ en utilisant la translation de vecteur $\vec{v} = a\vec{j}$

7-3 Représentation graphique de la fonction $x \mapsto f(x+a)$

Remarque 11 :



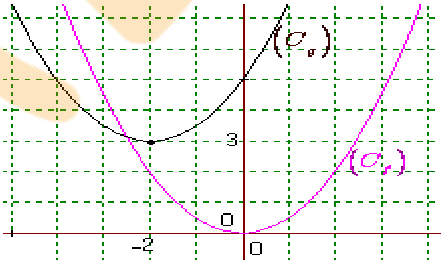
On a $M(x;f(x)) \in (\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow M'(x-a;f(x)) \in (\mathcal{C}_h)$

Donc $\overrightarrow{MM'}(-a;0)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{MM'} = -a\vec{i} + 0\vec{j} = a\vec{i}$

Par conséquent, la courbe de fonction $x \mapsto f(x+a)$ peut être dessiner à partir de la courbe de la fonction $x \mapsto f(x)$ en utilisant la translation de vecteur $\vec{v} = -a\vec{i}$

7-4 Représentation graphique de la fonction $g:\ x \mapsto f(x+a)+b$

Remarque 12 :



On a $M(x;f(x)) \in (\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow M'(x-a;f(x)+b) \in (\mathcal{C}_h)$

Donc $\overrightarrow{MM'}(-a;b)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{MM'} = -a\vec{i} + b\vec{j}$

Par conséquent, la courbe de fonction $g:\ x \mapsto f(x+a)+b$ peut être dessiner à partir de la courbe de la fonction $x \mapsto f(x)$ en utilisant la translation de vecteur $\vec{v} = -a\vec{i} + b\vec{j}$

7-5 Applications

Application 12 :

On considère les fonctions f, g et h tels que $f(x) = \frac{1}{3}x^2$, $g(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2$ et $h(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

1) Construire $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

2) a) Montrer que $g(x) = f(x+1)$ puis déduire que $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par une translation d'un vecteur à déterminer.

b) Construire $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3) a) Montrer que $h(x) = g(x)+1$ puis déduire que $(\mathcal{C}_h)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par une translation d'un vecteur à déterminer.

b) Construire $(\mathcal{C}_h)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Application 13 :

On considère les fonctions f, g et h tels que $f(x) = \frac{3}{x}$, $f(x) = \frac{3}{x-1}$ et $h(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

1) Construire $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

2) Montrer que $g(x) = f(x-1)$ puis construire $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3) Montrer que $h(x) = g(x)+2$ puis construire $(\mathcal{C}_h)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Application 14 :

On considère les fonctions f et g tels que $f(x) = \frac{5}{x}$ et $h(x) = \frac{-3x+2}{x+1}$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}_f)$ puis construire $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

2) Compléter par le nombre convenable l'égalité suivant $-3x+2 = -3(x+1)+....$ puis déduire que $g(x) = f(x+1)-3$

3) En déduire que $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par une translation d'un vecteur à déterminer puis construire $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

8) Les fonctions de références : $x \mapsto ax^2+bx+c$, $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $x \mapsto cos(x)$ et $x \mapsto sin(x)$

8-1 Etude de la fonction $x \mapsto ax^2+bx+c$ tel que $a \neq 0$

Activité 10 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=ax^2+bx+c$ tel que $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que le taux de variation de la fonction f entre deux éléments distincts x et y de D_f est $T=a\left(x+y+\dfrac{b}{a}\right)$

3) En déduire les variations de f sur les intervalles $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$ et $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ dans les cas $a>0$ et $a<0$

4) Ecrire $f(x)$ sous la forme canonique et déduire que $f(-\dfrac{b}{2a})=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

5) Dresser le tableau de variations de f dans les cas $a>0$ et $a<0$ puis déduire que f admet un extremum à déterminer.

6) On considère la fonction g définie par $g(x)=ax^2$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_g)$

b) Vérifier que $f(x)=g(x+\dfrac{b}{2a})+f(-\dfrac{b}{2a})$

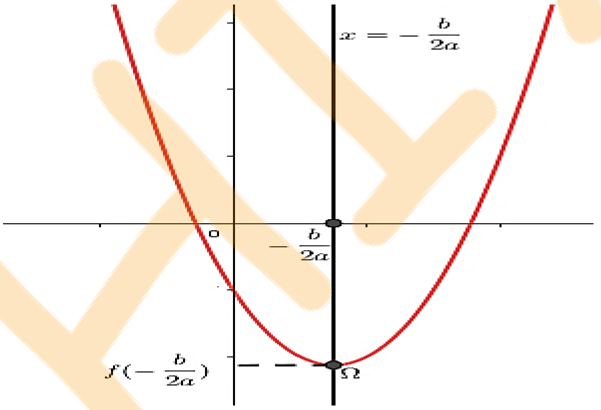
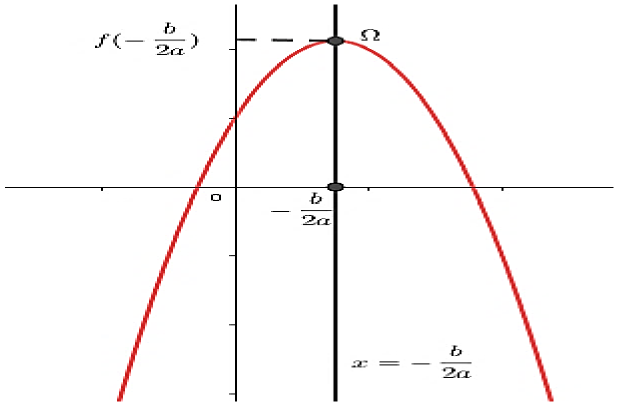
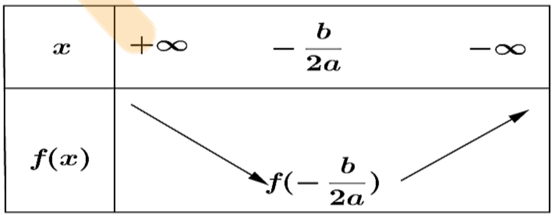
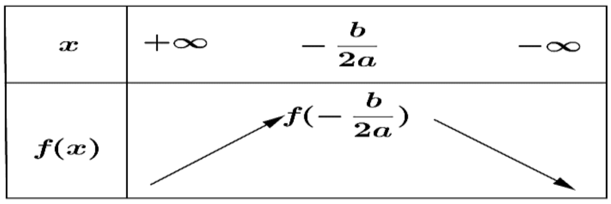
c) En déduire que $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par une translation d'un vecteur à déterminer. (Utiliser la remarque 12)

d) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Propriété 10 :

Soit $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

La courbe de la fonction $f: x \mapsto ax^2+bx+c$ dans un repère du plan est une parabole de sommet $\Omega\left(-\dfrac{b}{2a};f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\dfrac{b}{2a}$

	$a>0$	$a<0$
La courbe $(\mathcal{C}_f)$		
Tableau de variations de f		
Extremums	$f(-\dfrac{b}{2a})$ est la valeur minimale de f sur $\mathbb{R}$	$f(-\dfrac{b}{2a})$ est la valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$

Remarque 13 :

$(\mathcal{C}_f)$ est symétrique par rapport à la droite (Δ): $x=-\dfrac{b}{2a}$

Donc il suffit de tracer $(\mathcal{C}_f)$ sur $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$ et déduire $(\mathcal{C}_f)$ sur $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ en utilisant la symétrie axiale d'axe (Δ)

Exemple 11 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=x^2+4x+1$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Calculer $f(-1)$ et $f(1)$ puis déduire que f est ni paire, ni impaire.

3) Dresser le tableau de variations de f.

4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

5) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Forme canonique

$ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a}$

Propriété 11 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ tel que $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ et $a\neq 0$
Si $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ est la forme canonique de $f(x)$ alors la courbe de la fonction f est une parabole de sommet $\Omega(-\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$

Exemple 12 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=2x^2-5x+3$

On a la forme canonique de $f(x)$ est $f(x)=2(x-\dfrac{5}{2\times2})^2+\dfrac{(-5)^2-4\times2\times3}{4\times2}$, c'est-à-dire $f(x)=2(x-\dfrac{5}{4})^2+\dfrac{49}{8}$

Donc $(\mathcal{C}_f)$ est une parabole de sommet $\Omega\left(\dfrac{5}{4};\dfrac{49}{8}\right)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\dfrac{5}{4}$

Application 15 :

On considère les fonction f et g définie par $f(x)=-3x^2+12x+4$ et $g(x)=x^2+4x+3$

1) Donner la forme canonique de f et de g

2) En déduire les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}_f)$ et de $(\mathcal{C}_g)$

8-2 Etude de la fonction $x\mapsto\dfrac{ax+b}{cx+d}$ tel que $a;b;c;d\in\mathbb{R},\ c\neq 0$ et $ad-bc\neq 0$

Activité 11 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ tel que $a;b;c;d\in\mathbb{R},\ c\neq0$ et $ad-bc\neq0$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que le taux de variation de f entre deux éléments distincts x et y de D_f est :

$T=\dfrac{1}{c^2}\times\dfrac{\Delta}{(x+\frac{d}{c})(y+\frac{d}{c})}$ tel que $\Delta=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$

3) En déduire les variations de f sur les intervalles $\left]-\dfrac{d}{c};+\infty\right[$ et $\left]-\infty;-\dfrac{d}{c}\right[$ dans les cas $\Delta>0$ et $\Delta<0$

5) Dresser le tableau de variations de f dans les cas $\Delta>0$ et $\Delta<0$

6) On considère la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{-\frac{1}{c^2}\times(ad-bc)}{x}$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_g)$

b) Vérifier que $f(x)=g(x+\dfrac{d}{c})+\dfrac{a}{c}$

c) En déduire que $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par une translation d'un vecteur à déterminer. (Utiliser la remarque 12)

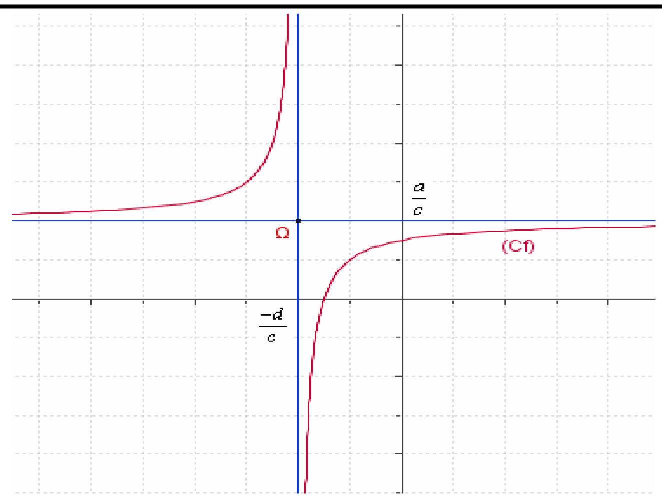
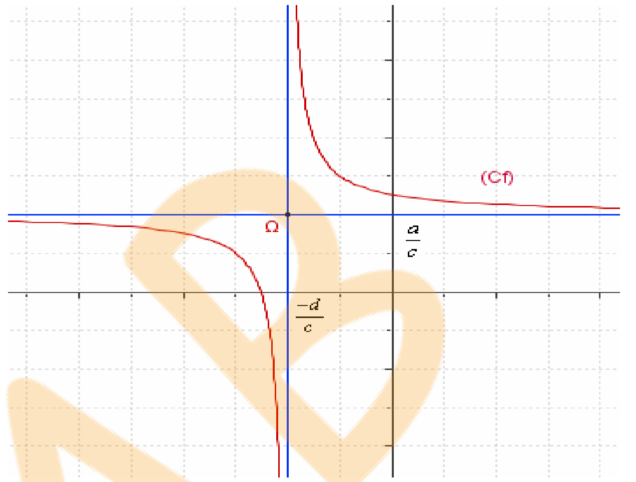
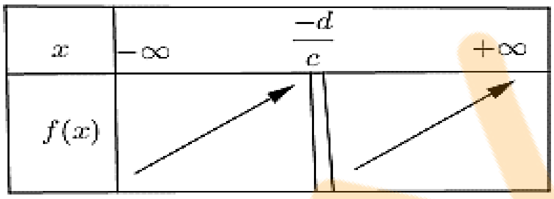
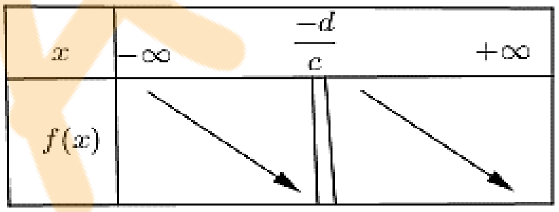
d) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

e) On pose $\alpha=\dfrac{d}{c}$, $\beta=\dfrac{a}{c}$ et $\lambda=-\dfrac{1}{c^2}\times(ad-bc)$. Montrer que $f(x)=\beta+\dfrac{\lambda}{x+\alpha}$ (Utiliser la question 6) b))

Définition 13 et propriété 12 :

- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ tel que $a;b;c;d \in \mathbb{R},\ c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$ est appelée **fonction homographique**.
- La courbe de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ tel que $a;b;c;d \in \mathbb{R},\ c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$ dans un repère du plan est

une **hyperbole** de **centre** $\Omega\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et **d'asymptotes** les droites $x=-\dfrac{d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$
La courbe $(\mathcal{C}_f)$		
Tableau de variations de f		

Remarque 14 :

$(\mathcal{C}_f)$ est symétrique par rapport au point $\Omega\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$

Exemple 13 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{-x+2}{x-1}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Dresser le tableau de variations de f.

3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

4) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Définition 14 et propriété 13 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ tel que $a;b;c;d \in \mathbb{R},\ c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$

Il existe des nombres réels α, β et λ tel que $f(x)=\beta+\dfrac{\lambda}{x+\alpha}$

Cette formule est appelée **la formule réduite** de $f(x)$.

Propriété 14 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ tel que $a;b;c;d \in \mathbb{R},\ c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$

Si $f(x)=\beta+\dfrac{\lambda}{x+\alpha}$ est la forme réduite de $f(x)$ alors :

- La courbe de la fonction f est une hyperbole de centre $\Omega(-\alpha;\beta)$ et d'asymptotes les droites $x=-\alpha$ et $y=\beta$
- Tableau de variations de f :

$\lambda > 0$	$\lambda < 0$
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\alpha$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>↘</td><td>‖</td><td>↘</td></tr></table>	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\alpha$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>↗</td><td>‖</td><td>↗</td></tr></table>

Exemple 14 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$

- On a la forme réduite de $f(x)$ est $f(x)=\dfrac{2(x-3)+7}{x-3}=2+\dfrac{7}{x-3}$

Donc $(\mathcal{C}_f)$ est une hyperbole de centre $\Omega(3;2)$ et d'asymptotes les droites $x=3$ et $y=2$

- Tableau de variations de f :

Puisque $7>0$ alors :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

Application 16 :

On considère les fonction f et g définie par $f(x)=\dfrac{4x+8}{x+6}$ et $g(x)=\dfrac{3x-1}{2x+3}$

1) Donner la forme réduite de f et de g
2) En déduire les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}_f)$ et de $(\mathcal{C}_g)$
3) Dresser les tableaux de variations de f et de g

8-3 Fonction périodique

Définition 15 :

Soit T un nombre réel strictement positif.

On dit que f est **périodique** de période T si pour tout $x\in D_f$ on a : $\begin{cases}(x+T)\in D_f\\ f(x+T)=f(x)\end{cases}$

Exemple 15 :

- Cosinus et sinus sont des fonctions périodiques de période : $T=2\pi$ car pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a :

$\begin{cases}(x+2\pi)\in\mathbb{R}\\ cos(x+2\pi)=cos(x)\end{cases}$ et $\begin{cases}(x+2\pi)\in\mathbb{R}\\ sin(x+2\pi)=sin(x)\end{cases}$

- La fonction tangente est périodique de période : $T=\pi$ car pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ on a : $\begin{cases}(x+\pi)\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}\\ tan(x+\pi)=tan(x)\end{cases}$

Application 17 :

Montrer que T est une période de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=sin(2x)$ et $T=\pi$
2) $f(x)=cos(\pi x)$ et $T=2$
3) $f(x)=\dfrac{1}{1+sin^2(x)}$ et $T=\pi$

Propriété 15 :

Soit f une fonction périodique de période T et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

- Pour tout $k\in\mathbb{Z}^*$, le nombre kT est aussi une période de la fonction f.
- La courbe $(\mathcal{C}_f)$ est invariante par toute translation de vecteur $kT\vec{i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
- Ainsi pour étudier une fonction périodique de période T, il suffit de l'étudier sur un intervalle de de longueur T.

(Très souvent, on choisit un des deux intervalles $[0;T]$ ou $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$).

8-4 Etude de la fonction $x\mapsto cos(x)$

Définition 16 :

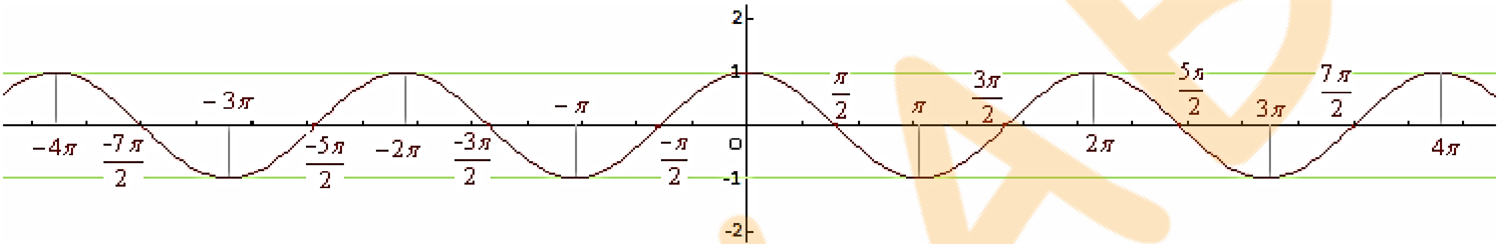
La fonction cosinus est la fonction qui, à chaque nombre réel x associe son cosinus : $cos(x)$ on écrit $x\mapsto cos(x)$

Propriété 16 :

La fonction $x\mapsto cos(x)$ est paire et périodique de période 2π.

Remarque 15 : La courbe de la fonction $x\mapsto cos(x)$ sur IR

Il suffit de représenter la courbe de la fonction $x\mapsto cos(x)$ sur l'intervalle $[0;2\pi]$ et compléter par translation :



8-5 Etude de la fonction $x\mapsto sin(x)$

Définition 17 :

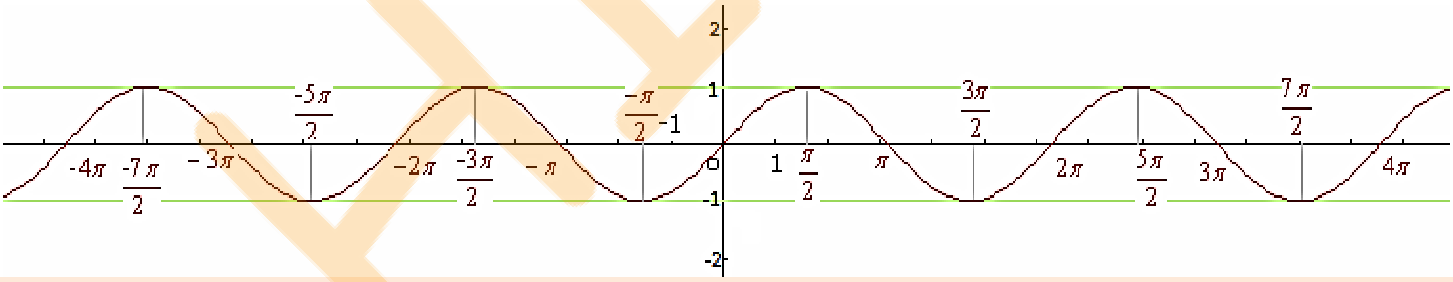
La fonction sinus est la fonction qui, à chaque nombre réel x associe son sinus : $sin(x)$ on écrit $x\mapsto sin(x)$

Propriété 17 :

La fonction $x\mapsto sin(x)$ est impaire et périodique de période 2π.

Remarque 16 : La courbe de la fonction $x\mapsto sin(x)$ sur IR

Il suffit de représenter la courbe de la fonction $x\mapsto sin(x)$ sur l'intervalle $[0;2\pi]$ et compléter par translation :

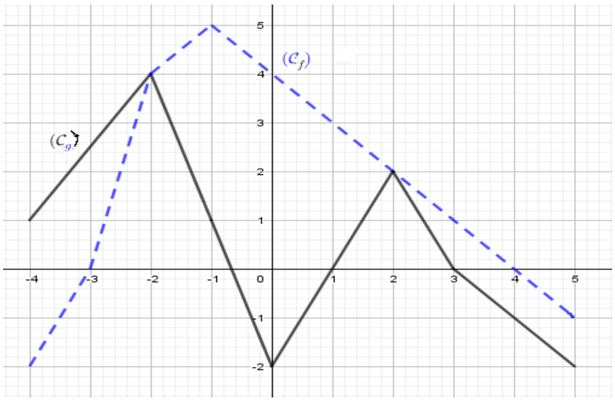


9) Résolution graphique des équations et inéquations

Activité 12 :

Dans la figure ci-contre $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ désignes les courbes de deux fonctions f et g sur l'intervalle $[-4;5]$

1) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=0$
2) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=4$
3) Résoudre graphiquement les inéquations $f(x)\geq 0$ et $f(x)\leq 0$
4) Résoudre graphiquement les inéquations $f(x)\geq 4$ et $f(x)\leq 4$
5) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$
6) Résoudre graphiquement les inéquations $f(x)\geq g(x)$ et $f(x)\leq g(x)$



Propriétés 18 :

Soient f et g deux fonctions numériques, $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ leurs courbes respectives dans un repère et b un nombre réel.

- Les solutions de l'équation $f(x)=m$ sont les abscisses des points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et la droite d'équation $y = m$.
- Les solutions de l'inéquation $f(x)\geq m$ (resp. $f(x)\leq m$) sont les l'intervalles dont $(\mathcal{C}_f)$ est situés au-dessus (resp. au-dessous) de la droite d'équation $y = m$.
- Les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.
- Les solutions de l'inéquation $f(x)\geq g(x)$ (resp. $f(x)\leq g(x)$) sont les l'intervalles dont $(\mathcal{C}_f)$ est situés au-dessus (resp. au-dessous) de $(\mathcal{C}_g)$.

Application 18 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Dresser dans le même repère les courbes $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$ des fonctions f, g et h définies par :

$$f(x)=x^2,\ g(x)=\frac{1}{x}\quad \text{et}\quad h(x)=x$$

2) Résoudre graphiquement puis algébriquement les équations $f(x)=g(x)$, $f(x)=h(x)$ et $g(x)=h(x)$

3) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)>g(x)$

4) Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2\leq 1$

5) Résoudre graphiquement l'inéquation $\frac{1}{x}-x\leq 0$

Application 19 :

Soient f et g les fonctions définies par : $f(x)=x^2-2x-3$ et $g(x)=\frac{-x-7}{x+1}$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}_f)$ et de $(\mathcal{C}_g)$

1) Résoudre graphiquement puis algébriquement l'équation $f(x)=0$

2) Résoudre graphiquement les inéquations $f(x)\geq 0$ et $f(x)\leq 0$

3) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=5$

4) Résoudre graphiquement les inéquations $f(x)\geq 5$ et $f(x)\leq 5$

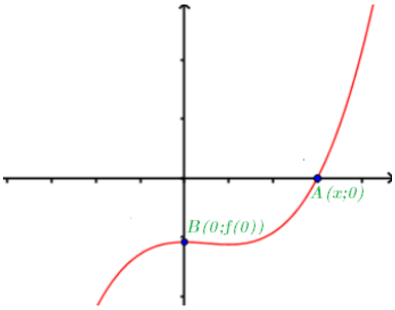
5) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$

6) Résoudre graphiquement les inéquations $f(x)\geq g(x)$ et $f(x)\leq g(x)$

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Remarque 17 : Les points d'intersection avec les axes du repère :

- Les points de la forme $M(x;0)$ tel que x est une solution de l'équation $f(x)=0$ sont les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.
- Le point $B(0;f(0))$ est le point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des ordonnées.



Application 20 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=x^2-8x+7$

Déterminer les points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère.

Complément de cours : Etude des fonctions $x\mapsto f(|x|)$ et $x\mapsto |f(x)|$

Résumé 12 : Fonctions numériques

Soit f une fonction numérique, D_f son ensemble de définition, $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Soit x et y deux éléments distincts de D_f, on pose $T(x;y)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ (Le taux de variation de f entre x et y).

I un intervalle de D_f. On note "pour tout " par " prt "

Ensemble de définition d'une fonction

- $D_f=\{$les réels x pour lesquels on peut calculer $f(x)\}$
- Si f est un polynôme alors $D_f=\mathbb{R}$
- Si $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ alors $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,Q(x)\neq 0\}$
- Si $f(x)=\sqrt{P(x)}$ alors $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,P(x)\geq 0\}$

Parité d'une fonction

Définition

- f *est paire* $\Leftrightarrow\begin{cases}D_f \text{ est symétrique par rapport à } 0\\ (\text{prt } x\in D_f)\quad f(-x)=f(x)\end{cases}$
- f *est impaire* $\Leftrightarrow\begin{cases}D_f \text{ est symétrique par rapport à } 0\\ (\text{prt } x\in D_f)\quad f(-x)=-f(x)\end{cases}$

Propriété

- f *est paire* $\Leftrightarrow\begin{cases}(\mathcal{C}_f) \text{ est symétrique par rapport}\\ \text{à l'axe des ordonnés}\end{cases}$
- f *est impaire* $\Leftrightarrow\begin{cases}(\mathcal{C}_f) \text{ est symétrique par rapport}\\ \text{à l'origine du repère}\end{cases}$

Variations d'une fonction

Définition :

- f *est croissante sur* $I\Leftrightarrow[(\text{prt } x;y\in I):\ x>y\Rightarrow f(x)\geq f(y)]$
- f *est décroissante sur* $I\Leftrightarrow[(\text{prt } x;y\in I):\ x>y\Rightarrow f(x)\leq f(y)]$
- f *est constante sur* $I\Leftrightarrow[(\text{prt } x;y\in I):\ x>y\Rightarrow f(x)=f(y)]$

Propriété :

- f *est croissante sur* $I\Leftrightarrow(\text{prt } x,y\in I):\ T(x;y)\geq 0$
- f *est décroissante sur* $I\Leftrightarrow(\text{prt } x,y\in I):\ T(x;y)\leq 0)$
- f *est constante sur* $I\Leftrightarrow((\text{prt } x,y\in I):\ T(x;y)=0$

Variations et parité :

Soit I et J deux intervalles symétriques par rapport à 0 de D_f

- Si f est paire, alors :

f *est croissante sur* $I\Leftrightarrow f$ *est décroissante sur* J

f *est décroissante sur* $I\Leftrightarrow f$ *est croissante sur* J

- Si f est impaire, alors :

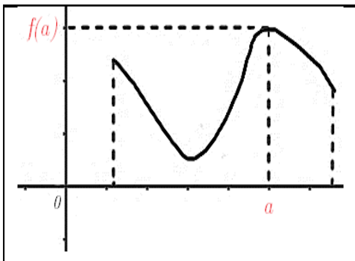
f *est croissante sur* $I\Leftrightarrow f$ *est croissante sur* J

f *est décroissante sur* $I\Leftrightarrow f$ *est décroissante sur* J

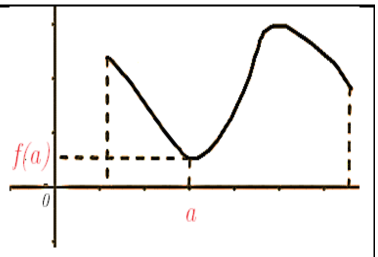
Valeur maximale - Valeur minimale

Définition

- $f(a)$ valeur maximale de f sur $I\Leftrightarrow(\text{prt } x\in I)\ f(x)\leq f(a)$
- $f(a)$ valeur minimale de f sur $I\Leftrightarrow(\text{prt } x\in I)\ f(x)\geq f(a)$



$f(a)$ valeur maximale



$f(a)$ valeur minimale

- $f(a)$ est un extremum de $f\Leftrightarrow\begin{cases}f(a) \text{ valeur maximale de } f\\ \quad ou\\ f(a) \text{ valeur minimale de } f\end{cases}$

Propriété

- M valeur maximale de f sur I

$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\leq M \text{ pour tout } x\in I\\ l'\text{équation } f(x)=M \text{ admet au moins une solution dans } I\end{cases}$

- m valeur minimale de f sur I

$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geq m \text{ pour tout } x\in I\\ l'\text{équation } f(x)=m \text{ admet au moins une solution dans } I\end{cases}$

Egalité de deux fonctions

- $f=g\Leftrightarrow\begin{cases}D_f=D_g\\ (\text{prt } x\in D_f)\quad f(x)=g(x)\end{cases}$

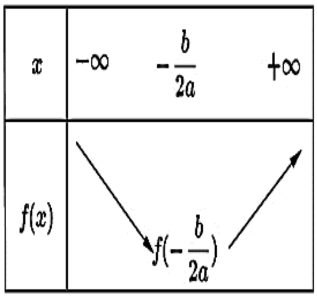
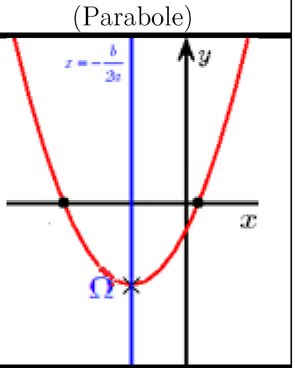
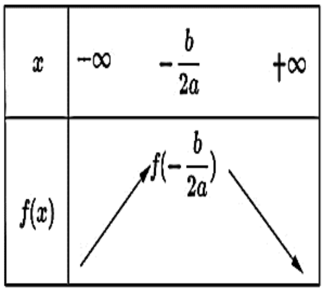
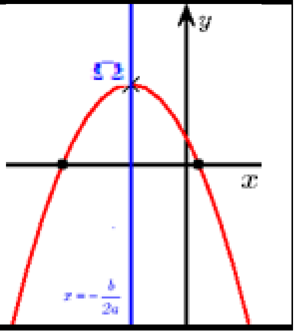
Courbe d'une fonction

- $(\mathcal{C}_f)=\{M(x;f(x))\,/\,x\in D_f\}$
- $M(x;y)\in(\mathcal{C}_f)\Leftrightarrow x\in D_f$ et $f(x)=y$

Etude de la fonction f tel que $f(x)=ax^2+bx+c$

- f est appelé : fonction polynomiale de deuxième degré.
- $D_f=\mathbb{R}$
- $(\mathcal{C}_f)$ est une parabole de **sommet** $\Omega\left(-\dfrac{b}{2a};f(-\dfrac{b}{2a})\right)$ et

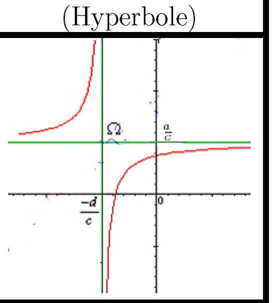
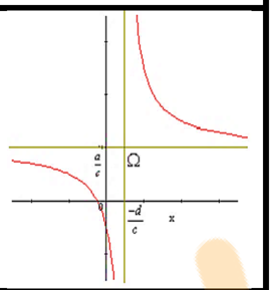
d'**axe de symétrie** la droite $x=-\dfrac{b}{2a}$

	Tableau de variations de f	La courbe $(\mathcal{C}_f)$ (Parabole)
$a>0$		
$a<0$		

Si $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ est la forme canonique de $f(x)=ax^2+bx+c$ alors $(\mathcal{C}_f)$ est une parabole de sommet $\Omega(-\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$

Etude de la fonction g tel que $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

- g est appelé : fonction homographique
- $D_g=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-d}{c}\right\}$
- $(\mathcal{C}_g)$ est une hyperbole de **centre** $\Omega\left(\dfrac{-d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'**asymptotes** les droites $x=\dfrac{-d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

	Tableau de variations de g	La courbe $(\mathcal{C}_g)$ (Hyperbole)
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}>0$	x : $-\infty$; $\frac{-d}{c}$; $+\infty$ $f(x)$: ↗ ‖ ↗	
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}<0$	x : $-\infty$; $\frac{-d}{c}$; $+\infty$ $f(x)$: ↘ ‖ ↘	

Si $f(x)=\beta+\dfrac{\lambda}{x+\alpha}$ est la forme réduite de $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

alors :

- $(\mathcal{C}_f)$ est une hyperbole de centre $\Omega(-\alpha;\beta)$ et d'asymptotes les droites $x=-\alpha$ et $y=\beta$
- Tableau de variations de f :

Si $\lambda>0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

Si $\lambda<0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

Résolution graphique des équations et inéquations

L'équation	$f(x)=m$	$f(x)=g(x)$
Les abscisses des points d'intersection de	$(\mathcal{C}_f)$ avec la droite $y=m$	$(\mathcal{C}_f)$ avec $(\mathcal{C}_g)$

L'inéquation	$f(x)>m$	$f(x)>g(x)$
Sont les intervalles dont	$(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de la droite $y=m$	$(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathcal{C}_g)$

Remarques :

- Une fonction f se note également par $f:\ x\mapsto f(x)$
- Pour déterminer les antécédents x d'un nombre b par la fonction f, on résout l'équation $f(x)=b$
- Pour déterminer D_f, il faut se limiter aux nombres réels dont le dénominateur est différent de zéro et ce qui est à l'intérieur de la racine est positif...
- $D_E=D_f\cap\mathbb{R}^+$ est l'ensemble d'étude des fonctions paires et des fonctions impaires.
- Une fonction est dite monotone sur un intervalle I, si elle est croissante ou décroissante sur I.
- Une fonction est dite strictement monotone sur un intervalle I, si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

Intersection avec les axes du repère

- Les points de la forme $M(x;0)$ tel que x est une solution de l'équation $f(x)=0$ sont les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.
- Le point $B(0;f(0))$ est le point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des ordonnées.

Fonction périodique

Définition : Soit $T\in\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{cases} f \text{ est périodique} \\ \text{de période } T \end{cases} \Leftrightarrow (\text{prt } x\in D_f):\begin{cases}(x+T)\in D_f \\ f(x+T)=f(x)\end{cases}$$

Exemples classiques :

- Cosinus et sinus sont des fonctions périodiques de période : $T=2\pi$ car : $(\text{prt } x\in\mathbb{R}):\begin{cases}(x+2\pi)\in\mathbb{R} \\ cos(x+2\pi)=cos(x)\end{cases}$

  et $(\text{prt } x\in\mathbb{R}):\begin{cases}(x+2\pi)\in\mathbb{R} \\ sin(x+2\pi)=sin(x)\end{cases}$
- La fonction tangente est périodique de période : $T=\pi$

  car : $\left(\text{prt } x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}\right):\begin{cases}(x+\pi)\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\} \\ tan(x+\pi)=tan(x)\end{cases}$

Les fonctions $x\mapsto -f(x)$, $x\mapsto f(x)+a$ et $x\mapsto f(x+a)+b$

- La courbe de fonction $x\mapsto -f(x)$ peut être dessiner à partir de la courbe de la fonction $x\mapsto f(x)$ en utilisant la symétrie axiale d'axe des abscisses.
- La courbe de fonction $x\mapsto f(x)+a$ peut être dessiner à partir de la courbe de la fonction $x\mapsto f(x)$ en utilisant la translation de vecteur $\vec{v}=a\vec{j}$
- La courbe de fonction $x\mapsto f(x+a)$ peut être dessiner à partir de la courbe de la fonction $x\mapsto f(x)$ en utilisant la translation de vecteur $\vec{v}=-a\vec{i}$
- La courbe de fonction $g:\ x\mapsto f(x+a)+b$ peut être dessiner à partir de la courbe de la fonction $x\mapsto f(x)$ en utilisant la translation de vecteur $\vec{v}=-a\vec{i}+b\vec{j}$

Prof : Aissa HIYAB
Niveau : TCSF

Série 12
Fonctions numériques

Lycée : Abdellah Chafchaouni
Matière : Mathématique

Exercice 1 :

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes

$f_1(x)=x^3-3x+1$; $f_2(x)=2x-\sqrt{x}$;

$f_3(x)=x^2-3x+\dfrac{2}{x}$; $f_4(x)=\dfrac{2x}{x-5}$;

$f_5(x)=x^2-\sqrt{3x+4}$; $f_6(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$;

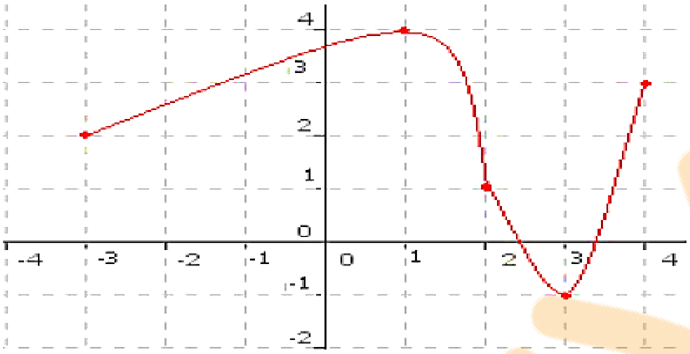
$f_7(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$; $f_8(x)=\dfrac{x^2+5}{x^2-1}$;

$f_9(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{3-x}}$; $f_{10}(x)=\dfrac{5x^3}{x^2-x+1}$;

$f_{11}(x)=\dfrac{|x|-x}{x^2+2x-3}$; $f_{12}(x)=\dfrac{x^3}{|x|-5}$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $[-3;4]$ par sa courbe :



1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

2) Donner la valeur maximale et la valeur minimale de f

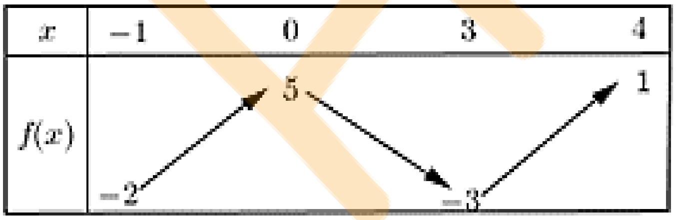
3) En déduire que $-1\leq f(x)\leq 4$ pour tout $x\in D_f$

3) Dresser le tableau de variations de f .

4) Justifier que f est ni paire ni impaire.

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie par son tableau de variations sur $[-1;4]$:



x	-1		0		3		4
$f(x)$	-2	↗	5	↘	-3	↗	1

1) Déterminer les extrémums de f sur $[-1;4]$

2) Comparer $f(1)$ et $f(2)$

3) Sachant que f est paire dresser sa table de variations sur $[-4;4]$

Exercice 4 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=-4x^2+4x+5$

1) Montrer que $f(x)=6-(2x-1)^2$

2) En déduire que $f(x)\leq 6$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

3) Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et déduire que 6 est la valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

1) Déterminer D_f et vérifier que f est paire.

2) En déduire $D_E=D_f\cap\mathbb{R}^+$ l'ensemble d'étude de f .

3) Montrer que pour tous réels x et y distincts de D_E ,

on a : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=-\dfrac{x+y}{(x^2-1)(y^2-1)}$

4) Etudier les variations de f sur $[0;1[$ et $]1;+\infty[$

5) En déduire les variations de f sur $]-1;0]$ et $]-\infty;-1[$

6) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Exercice 6 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=x^2+4x+1$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

2) Dresser le tableau de variations de f .

3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

4) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé.

Exercice 7 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{-x+2}{x-1}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

2) Dresser le tableau de variations de f .

3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

4) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé.

Exercice 8 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=2\left(x+\dfrac{4}{x}\right)$

1) Déterminer D_f et vérifier que f est impaire.

2) Montrer que pour tous réels x et y distincts de D_f ,

on a : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=2\left(1-\dfrac{4}{xy}\right)$

3) Etudier les variations de f sur $[2;-\infty[$ et $]0;2]$

4) En déduire que f admet une valeur minimale sur $]0;+\infty[$

5) On considère un rectangle d'aire 4 et de longueur d'une de ses dimensions est t

a) Montrer que le périmètre de ce rectangle est $2\left(t+\dfrac{4}{t}\right)$

b) En déduire la valeur minimale du périmètre de ce rectangle.

Exercice 9 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{2x-5}{2-x}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère.

1) Comment appelle-t-on la fonction f ? Déterminer D_f

2) Dresser le tableau de variations f de sur D_f

3) Déterminer les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}_f)$

4) Tracer $(\mathcal{C}_f)$

Correction : https://drive.google.com/file/d/1nbUtCeMmYLnn2NYfE6JJNZwC4L1Fl_8e/view?usp=sharing

Exercice 10 :

On considère les fonctions f et g tels que :

$f(x)=\frac{1}{x}$ et $h(x)=\frac{2x+3}{x+1}$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}_f)$ puis construire $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) Compléter par le nombre convenable l'égalité suivant $2x+1=2(x+1)+....$ puis déduire que $g(x)=f(x+1)+2$

3) En déduire que $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par une translation d'un vecteur à déterminer puis construire $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 11 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=-x^2+2x$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Vérifier que $f(x)=-(x-1)^2+1$ pour tout $x\in D_f$

3) Montrer que pour tous réels x et y distincts de D_f on a : $T=2-x-y$

4) Etudier par deux méthodes les variations de f sur $[1;+\infty[$ et $]-\infty;1]$

5) Dresser le tableau de variations de f.

6) En déduire les extrémums de f

7) On considère la fonction g définie par : $g(x)=f(|x|)$

a) Montrer que g est paire.

b) Montrer que $g(x)=f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$

c) En déduire le tableau de variations de g.

Exercice 12 :

A) On considère la fonction f définie par : $f(x)=x^2+2x-3$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère.

3) Montrer que pour tous réels x et y distincts de D_f, on a : $T=x+y+2$

4) Etudier les variations de f sur $[-1;+\infty[$ et $]-\infty;-1]$

5) Dresser le tableau de variations de f et déduire les extrémums de f

6) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ puis le construire.

B) On considère la fonction g définie par : $g(x)=\frac{4x}{|x|+1}$

1) Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g.

2) Montrer que g est impaire.

3) Montrer que $g(x)=4-\frac{4}{x+1}$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$

4) En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}^+$

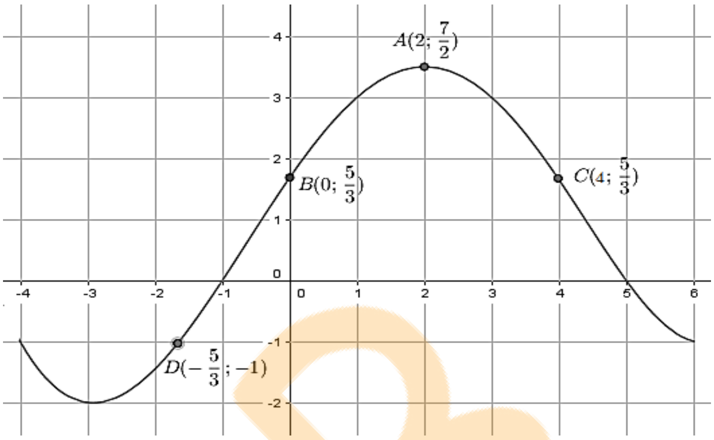
5) Dresser le tableau de variations de g sur D_g

6) Tracer $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

7) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $(x^2+2x-3)(|x|+1)=4x$

Exercice 13 :

Le graphe ci-dessous représente la courbe d'une fonction numérique f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$



1) Vérifiez que f est ni paire ni impaire.

2) Déterminer l'ensemble de définition de f.

3) Déterminer $f(-3)$, $f(3)$, $f(0)$ et $f(-1)$

4) Déterminer les antécédents des nombres suivants s'ils existent par la fonction f : 3, $\frac{5}{3}$ et -3.

5) Déterminer la valeur maximale et minimale de f.

6) Dresser le tableau de variations de f.

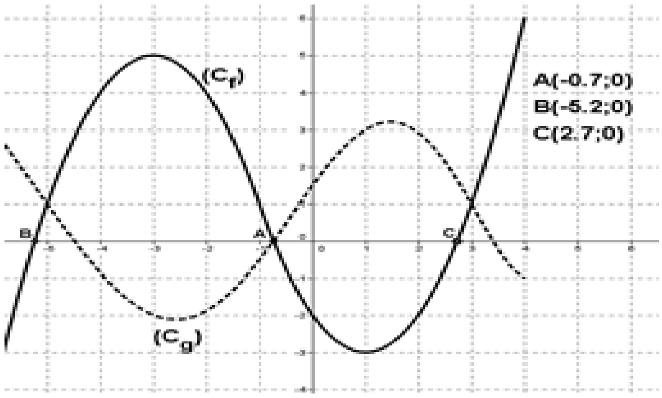
7) Résoudre les graphiquement les équations : $f(x)=0$, $f(x)=3$ et $f(x)=-1$

8) Résoudre les graphiquement les inéquations : $f(x)\geq 0$, $f(x)\leq 0$, $f(x)>3$ et $f(x)\leq -1$

9) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions $h(x)=\frac{x}{f(x)}$ et $g(x)=\sqrt{f(x)-3}$

Exercice 14 :

Dans la figure ci-contre $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ désignes les courbes de deux fonctions f et g sur l'intervalle $[-6;4]$



1) Déterminer $f(4)$, $f(1)$, $f(-1)$, $g(1)$ et $g(-3)$

2) Dresser le tableau de variations de f.

3) Résoudre les graphiquement l'équation : $f(x)=g(x)$

4) Résoudre les graphiquement les inéquations :

a) $f(x)\leq 0$ sur $[-4;2]$

b) $f(x)\geq g(x)$ sur $[-6;-2]$

5) Déterminer les extrémums de f sur $[-5;3]$

Correction : https://drive.google.com/file/d/1nbUtCeMmYLnn2NYfE6JJNZwC4L1Fl_8e/view?usp=sharing

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵓⵏⵏⵓⵏⵜ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

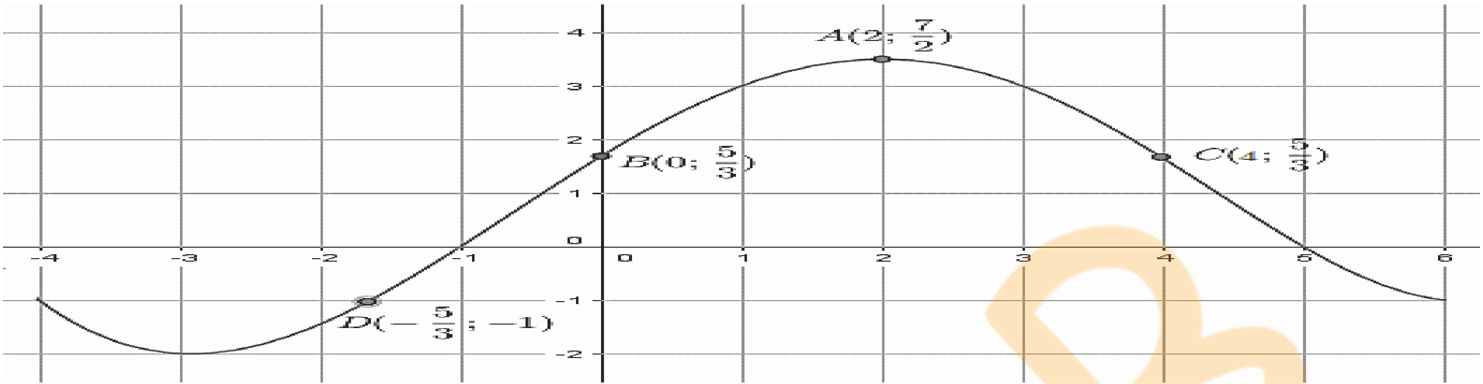
Académie de Souss Massa - Direction Régionale d'Inzegan Ait Meloul
Lycée qualifiant Abdellah Chafchaouni - Tamsia

DL5

TCSF
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1

Le graphe ci-dessous représente la courbe d'une fonction numérique f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$



1) Vérifiez que f est ni paire ni impaire.
2) Déterminer l'ensemble de définition de f.
3) Déterminer $f(-3)$, $f(3)$, $f(0)$ et $f(-1)$
4) Déterminer les antécédents des nombres suivants s'ils existent par la fonction f : 3, $\dfrac{5}{3}$ et -3.
5) Déterminer la valeur maximale et minimale de f.
6) Dresser le tableau de variations de f.
7) Résoudre les graphiquement les équations : $f(x)=0$, $f(x)=3$ et $f(x)=-1$
8) Résoudre les graphiquement les inéquations : $f(x)\geq 0$, $f(x)\leq 0$, $f(x)>3$ et $f(x)\leq -1$
9) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions $h(x)=\dfrac{x}{f(x)}$ et $g(x)=\sqrt{f(x)-3}$

Exercice 2

Soient f et g les fonctions définies par : $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ et $g(x)=x^2-2x$

1) Déterminer D_f et D_g
2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}_f)$ et de $(\mathcal{C}_g)$
3) Dresser les tableaux de variations de f et de g
4) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sont concourantes au points $O(0;0)$, $A(1;-1)$ et $B(3;3)$
5) Montrer par deux méthodes que -1 est la valeur minimale de g sur D_g
6) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$
7) Résoudre graphiquement l'équation : $g(x)=3$
8) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\leq 0$
9) Résoudre graphiquement l'inéquation : $\dfrac{x}{x-2}-x(x-2)\geq 0$
10) Résoudre graphiquement l'inéquation : $g(x)\leq 2x-3$

الأستاذ عيسى هياب

Exercice 3

On considère la fonction f définie par : $f(x)=2\left(x+\dfrac{4}{x}\right)$

1) Déterminer D_f et vérifier que f est impaire.
2) Montrer que pour tous réels x et y distincts de D_f , on a : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=2\left(1-\dfrac{4}{xy}\right)$
3) Etudier les variations de f sur $\left]2;-\infty\right[$ et $\left]0;2\right]$
4) En déduire que f admet une valeur minimale sur $\left]0;+\infty\right[$
5) On considère un rectangle d'aire 4 et de longueur d'une de ses dimensions est t
   a) Montrer que le périmètre de ce rectangle est $2\left(t+\dfrac{4}{t}\right)$; b) En déduire la valeur minimale du périmètre de ce rectangle.

Correction : https://drive.google.com/file/d/1GtzBGhf8RTpZpR0Ro9Q116V7rqlXeVN_/view?usp=sharing