

11

# Trigonométrie 2



# 1) Rappel 1

## Activité 1 :

- 1) Représenter l'intervalle  $[-\pi; \pi]$  sur un cercle trigonométrique.
- 2) Représenter l'intervalle  $[0; 2\pi]$  sur un cercle trigonométrique.



## Activité 2 :

Compléter le tableau suivant :

	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
$\sin$					
$\cos$					
$\tan$					

## Activité 3 :

Représenter sur un cercle trigonométrique les nombres :  $0$  ;  $\frac{\pi}{6}$  ;  $\frac{\pi}{4}$  ;  $\frac{\pi}{3}$  ;  $\frac{\pi}{2}$  ;  $-\frac{\pi}{2}$  ;  $\pi$  ;  $-\pi$  ;  $2\pi$

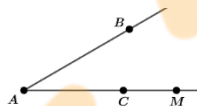
## Activité 4 :

- 1) Existe-il un réel  $x$  tel que  $\cos(x) = 2$  ? ;
- 2) Existe-il un réel  $y$  tel que  $\sin(y) = 3$  ?

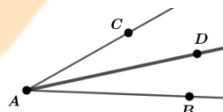
## Remarques 1 :

- La médiatrice d'un segment est la droite qui passe par le milieu de ce segment et qui lui est perpendiculaire.
- Le centre du cercle circonscrit est le point d'intersection des trois médiatrices du triangle.
- La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles égaux.
- Le centre du cercle inscrit est le point d'intersection des trois bissectrices intérieures du triangle.
- La somme des mesures des angles géométriques d'un triangle est égale à  $\pi$ .
- Tout triangle non rectangle a tous ses angles sont aigus (on dit dans ce cas que le triangle est acutangle) ou au plus un angle obtus (on dit dans ce cas que le triangle est obtus).

- Si  $M \in [AC)$  alors  $\widehat{BAM} = \widehat{BAC}$



- Relation de Chasles :  $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC}$



- Si  $b$  désigne la longueur d'un côté d'un triangle et  $h$  la hauteur relative à ce côté, l'aire de ce triangle est  $S = \frac{1}{2} \times b \times h$

# 2) Equations et inéquations trigonométriques

## 2-1 L'équation $\cos(x) = a$ et les inéquations $\cos(x) > a$ et $\cos(x) < a$

### Rappel 2 :

$$1 = \cos(\dots) ; \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\dots) ; \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\dots) ; \frac{1}{2} = \cos(\dots) ; 0 = \cos(\dots) ; -\cos(a) = \cos(\dots)$$

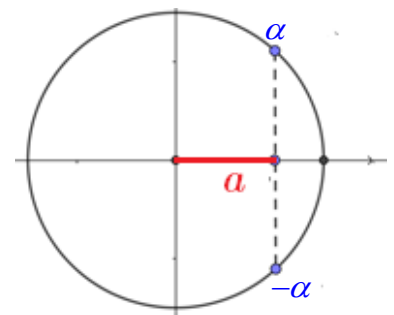
### Propriété 1

On considère l'équation  $\cos(x) = a$  avec  $a \in ]-1; 1[$  et  $S$  l'ensemble de ses solutions.

Il existe  $\alpha \in ]0; \pi[$  tel que  $a = \cos(\alpha)$

$$\text{Et } S = \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{Autrement dit : } \cos(x) = \cos(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



## Remarque 2 :

Pour résoudre l'inéquation  $\cos(x) > a$  ou  $\cos(x) < a$  avec  $a \in ]-1; 1[$  dans un intervalle donné on place premièrement sur le cercle trigonométrique l'intervalle et les points dont les abscisses curvilignes sont les solutions de l'équation  $\cos(x) = a$

## Exemple 1

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $(E_1)$   $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) Résoudre dans  $]-\pi; \pi]$  l'équation  $(E_1)$  et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

3) En utilisant le cercle trigonométrique précédent résoudre dans  $]-\pi; \pi]$  les inéquations :

$$\cos(x) > \frac{\sqrt{2}}{2} ; \cos(x) < \frac{\sqrt{2}}{2} ; \cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} ; \cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

## Application 1 :

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) Résoudre dans  $[0; 2\pi]$  l'équation  $\cos(x) = -\frac{1}{2}$  et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

3) En déduire les solutions dans  $[0; 2\pi]$  des inéquations :  $\cos(x) > -\frac{1}{2}$  ;  $\cos(x) < -\frac{1}{2}$  ;  $\cos(x) \geq -\frac{1}{2}$  ;  $\cos(x) \leq -\frac{1}{2}$

## Remarque 3 : Cas particulier

- Si  $a > 1$  ou  $a < -1$  alors l'équation  $\cos(x) = a$  n'admet pas de solution :  $S = \emptyset$
- L'ensemble de solutions de l'équation  $\cos(x) = -1$  est  $S = \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$
- L'ensemble de solutions de l'équation  $\cos(x) = 1$  est  $S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

## 2-2 L'équation $\sin(x) = a$ et les inéquations $\sin(x) > a$ et $\sin(x) < a$

### Rappel 3 :

$$1 = \sin(\dots) ; \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(\dots) ; \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(\dots) ; \frac{1}{2} = \sin(\dots) ; 0 = \sin(\dots) ; -\sin(a) = \sin(\dots)$$

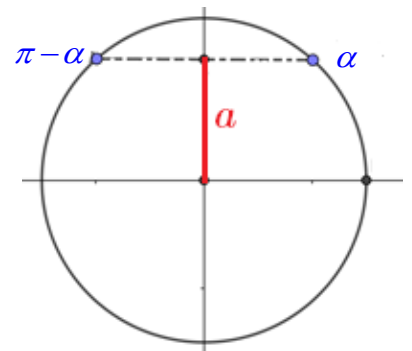
### Propriété 2

On considère l'équation  $\sin(x) = a$  avec  $a \in ]-1; 1[$  et  $S$  l'ensemble de ses solutions.

Il existe  $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  tel que  $a = \sin(\alpha)$

Et on a  $S = \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

Autrement dit :  $\sin(x) = \sin(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi & / k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi & / k \in \mathbb{Z} \end{cases}$



### Remarque 4 :

Pour résoudre l'inéquation  $\sin(x) > a$  ou  $\sin(x) < a$  avec  $a \in ]-1; 1[$  dans un intervalle donné on place premièrement sur le cercle trigonométrique l'intervalle et les points dont les abscisses curvilignes sont les solutions de l'équation  $\sin(x) = a$

### Application 2 :

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $(E_1)$   $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) Résoudre dans  $[-\pi; 2\pi[$  l'équation  $(E_1)$  et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

3) En déduire les solutions dans  $[-\pi; 2\pi[$  des inéquations :  $\sin(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$



### Remarque 5 : Cas particulier

- Si  $a > 1$  ou  $a < -1$  alors l'équation  $\sin(x) = a$  n'admet pas de solution :  $S = \emptyset$
- L'ensemble de solutions de l'équation  $\sin(x) = -1$  est  $S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$
- L'ensemble de solutions de l'équation  $\sin(x) = 1$  est  $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

## 2-3 L'équation $\tan(x) = a$ et les inéquations $\tan(x) > a$ et $\tan(x) < a$

### Rappel 4 :

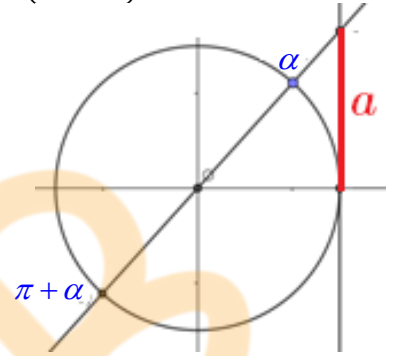
$$1 = \tan(\dots) ; \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan(\dots) ; \sqrt{3} = \tan(\dots) ; 0 = \tan(\dots) ; -\tan(a) = \tan(\dots)$$

### Propriété 3

On considère l'équation  $\tan(x) = a$  et  $S$  l'ensemble de ses solutions.

Il existe  $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  tel que  $a = \tan(\alpha)$  et on a  $S = \{ \alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z} \}$

Autrement dit :  $\tan(x) = \tan(\alpha) \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$



### Remarque 6 :

Pour résoudre l'inéquation  $\tan(x) > a$  ou  $\tan(x) < a$  avec  $a \in ]-1; 1[$  dans un intervalle donné on place premièrement sur le cercle trigonométrique l'intervalle et les points dont les abscisses curvilignes sont les solutions de l'équation  $\tan(x) = a$

### Application 3 :

- 1) Résoudre dans  $[-\pi; \pi[$  l'équation  $\tan(x) = -1$  et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.
- 2) Résoudre dans  $[-\pi; \pi[$  les inéquations :  $\tan(x) > -1$  et  $\tan(x) < -1$
- 3) Résoudre dans  $\left[ -\frac{7\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right[$  l'équation  $\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$  (tu peux mettre  $X = 2x - \frac{\pi}{3}$ )

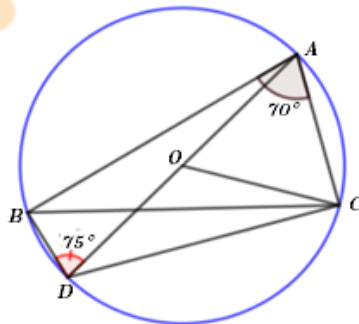
**Exercices :** Exercices de 1 à 12 de la série 11.

## 3) Angle inscrit - quadrilatère inscrit - loi des sinus

### Activité 4 :

$[AD]$  un diamètre d'un cercle  $(\mathcal{C})$  de centre  $O$ .

$B$  et  $C$  de points de  $(\mathcal{C})$  tel que  $\hat{BAC} = 70^\circ$  et  $\hat{ADB} = 75^\circ$  (voir la figure ci-dessous)

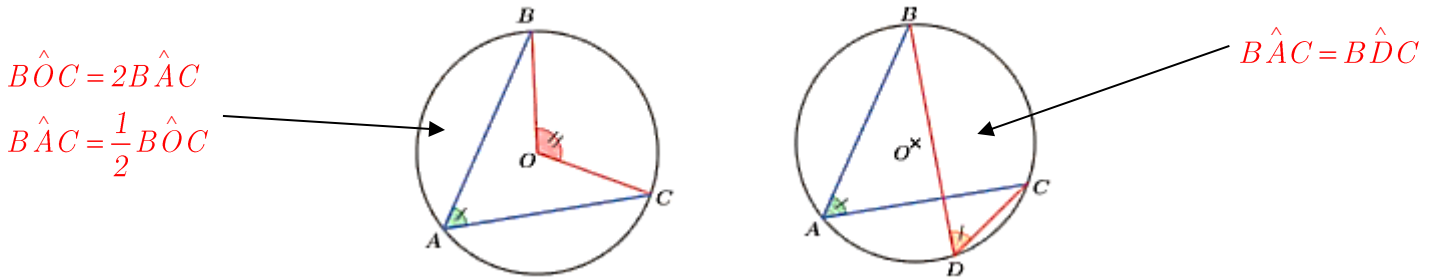


- 1) Déterminer la nature des triangles  $ABD$  et  $ACD$ .
- 2) Déterminer la mesure des angles suivants :  $\hat{BAD}$ ,  $\hat{CAD}$ ,  $\hat{CAO}$  et  $\hat{DBC}$ .
- 3) Déterminer la nature du triangle  $AOC$ .
- 4) En déduire la mesure des angles  $\hat{AOC}$  et  $\hat{ABC}$ .
- 5) Déterminer par deux méthodes la mesure des angles  $\hat{ACB}$  et  $\hat{BCD}$ .
- 6) Déterminer la mesure de l'angle  $\hat{BDC}$  et vérifier que  $\hat{BDC} + \hat{BAC} = 180^\circ$ .



## Propriétés 4

- Si deux angles sont inscrits dans un cercle et interceptent le même arc alors ils sont de même mesure.
- Si un angle au centre et un angle inscrit dans un cercle interceptent un même arc alors la mesure de l'angle au centre est égale au double de la mesure de l'angle inscrit.

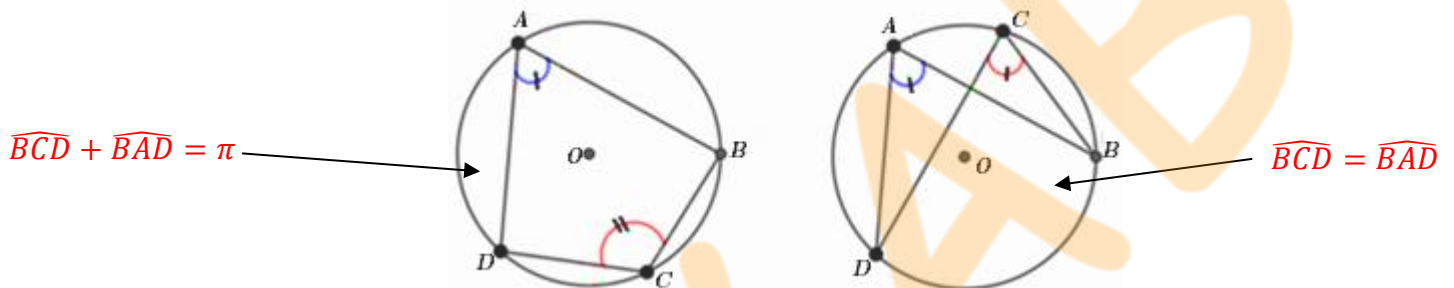


## Propriété 5 : Quadrilatère inscrit :

$A, B$  et  $C$  sont trois points non alignés,  $(C)$  le cercle circonscrit au triangle  $ABC$  et soit  $D$  un point du plan.

Le point  $D$  appartient au cercle  $(C)$  si et seulement si  $\widehat{BCD} = \widehat{BAD}$  ou  $\widehat{BCD} + \widehat{BAD} = \pi$

(Dans ce cas on dit que  $ABCD$  est un quadrilatère inscrit et que les points  $A, B, C$  et  $D$  sont cocycliques)



## Application 4 :

Dans un trapèze isocèle, les côtés adjacents aux bases sont isométriques.

On considère le trapèze isocèle  $ABCD$  de bases  $[AB]$  et  $[DC]$ ,  $M$  le point d'intersection de  $(AC)$  et  $(BD)$  et  $N$  est le point d'intersection de  $(AD)$  et  $(BC)$ .

- 1) Montrer que  $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = \pi$  puis déduire que  $ABCD$  est inscrit.
- 2) Soit  $O$  le centre du cercle circonscrit au trapèze  $ABCD$ .

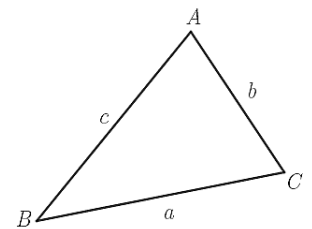
Montrer que  $\widehat{DOM} + \widehat{DAM} = \pi$  puis déduire que  $AMOD$  est inscrit.

## Théorème 1 : Loi des sinus

Soit  $ABC$  un triangle et  $R$  le rayon de son cercle circonscrit.

On pose  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$  et  $\widehat{BAC} = \hat{A}$ ,  $\widehat{CBA} = \hat{B}$ ,  $\widehat{ACB} = \hat{C}$  on a :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$



## Théorème 2 : Aire d'un triangle

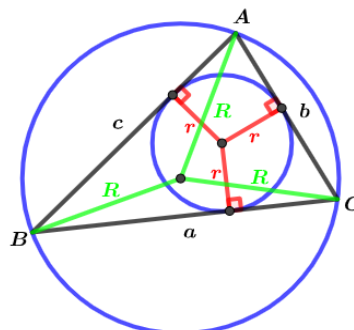
Soit  $ABC$  un triangle.

$R$  et  $r$  sont respectifs les rayons des cercles circonscrit et inscrit au triangle  $ABC$ .

On pose  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$  et soit  $p$  le demi-périmètre du triangle  $ABC$  ( $p = \frac{a+b+c}{2}$ )

L'aire du triangle  $ABC$  est :

- $S = \frac{abc}{4R}$
- $S = pr$
- $S = \frac{1}{2} a \times b \times \sin \hat{C} = \frac{1}{2} b \times c \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} a \times c \times \sin \hat{B}$



### Application 5 :

$ABC$  un triangle tel que  $\hat{ABC} = \frac{\pi}{6}$ ,  $\hat{ACB} = \frac{3\pi}{4}$  et  $AB = 6$ . Calculer  $\hat{BAC}$  et  $AC$ .

### Application 6 :

$ABC$  un triangle tel que  $BC = 4$ ,  $AC = \frac{4\sqrt{6}}{3}$  et  $\hat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$ .

1) En utilisant la loi des sinus déterminer  $\sin(\hat{ABC})$ .

2) En déduire  $\hat{ABC}$  et  $\hat{ACB}$ .

### Application 7 :

1) Calculer l'aire d'un triangle équilatéral de coté 5.

2) En déduire  $R$  et  $r$  les rayons des cercles circonscrit et inscrit.

### Application 8 :

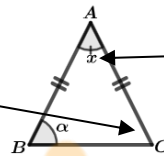
Calculer l'aire du triangle  $ABC$  sachant que  $AB = 5$ ,  $AC = 3$  et  $\hat{BAC} = \frac{\pi}{6}$ .

### Remarques 7 :

• Si  $ABC$  est un triangle isocèle en  $A$  alors :

$$\hat{ABC} = \hat{ACB} = \frac{\pi}{2} - \frac{\hat{BAC}}{2} \quad \text{et} \quad \hat{BAC} = \pi - 2\hat{ABC} = \pi - 2\hat{ACB}$$

$$\hat{ACB} = \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$$



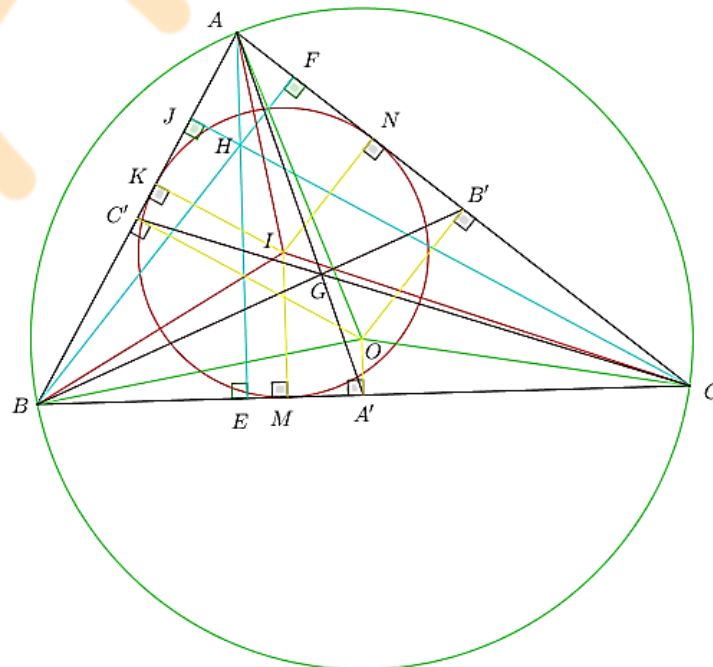
$$x = \pi - 2\alpha$$

- Si un triangle est isocèle dont l'un de ces angle égale à  $60^\circ$  alors il est équilatéral.
- Dans un triangle, une médiane est une droite passant par un sommet et par le milieu du côté opposé.
- Le centre de gravité d'un triangle est le point d'intersection des trois médianes de ce triangle.
- Dans un triangle, une hauteur est une droite passant par un sommet et coupant perpendiculairement le côté opposé.
- L'orthocentre est le point d'intersection des trois hauteurs du triangle.

**Exercices :** Exercices de 13 à 24 de la série 11.

### Pour la recherche :

- Cercle et inégalité d'Euler
- Point de Gergonne d'un triangle.
- Les cercles exinscrits et point de Nagel d'un triangle.
- Puissance d'un point par rapport à un cercle et l'axe radical de deux cercles.



# Résumé 11 : Trigonométrie 2

## Les équations trigonométriques de base :

$$\bullet \cos(x) = \cos(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi & / k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + 2k\pi & / k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\bullet \sin(x) = \sin(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi & / k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi & / k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\bullet \tan(x) = \tan(\alpha) \Leftrightarrow \alpha + k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$$



## Les inéquations trigonométriques de base :

Pour résoudre une inéquation trigonométrique de base dans un intervalle donné on place premièrement sur le cercle trigonométrique l'intervalle et les points dont les abscisses curvilignes sont les solutions de l'équation de base qui lui associé.

## Angle inscrit-angle au centre :

- Si deux angles sont inscrits dans un cercle et interceptent le même arc alors ils sont de même mesure.
- Si un angle au centre et un angle inscrit dans un cercle interceptent un même arc alors la mesure de l'angle au centre est égale au double de la mesure de l'angle inscrit.

## Quadrilatère inscritible :

$A, B$  et  $C$  sont trois point non alignés,  $(C)$  le cercle circonscrit au triangle  $ABC$  et soit  $D$  un point du plan.

Le point  $D$  appartient au cercle  $(C)$  si et seulement si  $\widehat{BCD} = \widehat{BAD}$  ou  $\widehat{BCD} + \widehat{BAD} = \pi$

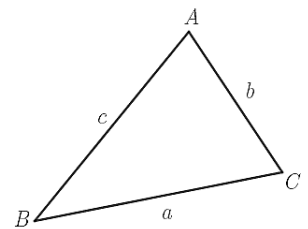
(Dans ce cas on dit que  $ABCD$  est un **quadrilatère inscritible** et que les points  $A, B, C$  et  $D$  sont **cocycliques**)

## Loi des sinus :

Soit  $ABC$  un triangle et  $R$  le rayon de son cercle circonscrit.

On pose  $a = BC, b = AC, c = AB$  on a :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$



## Aire d'un triangle :

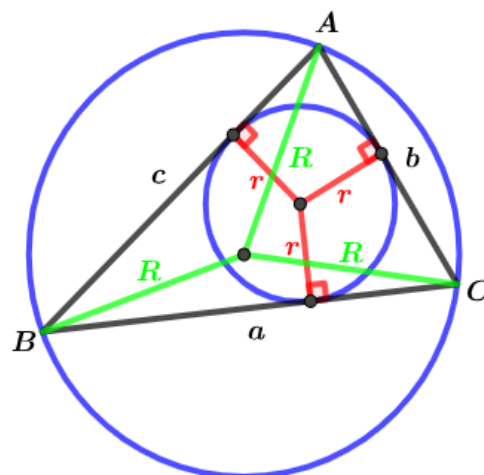
Soit  $ABC$  un triangle.

$R$  et  $r$  sont respectifs les rayons des cercles circonscrit et inscrit au triangle  $ABC$ .

On pose  $a = BC, b = AC, c = AB$  et soit  $p$  le demi-périmètre du triangle  $ABC$ .

L'aire du triangle  $ABC$  est :

- $S = \frac{abc}{4R}$
- $S = pr$
- $S = \frac{1}{2} a \times b \times \sin \hat{C} = \frac{1}{2} b \times c \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} a \times c \times \sin \hat{B}$



## Équations trigonométriques

## Exercice 1

Résoudre dans l'intervalle  $I$  les équations :

- $4\sin(x) = -2$  ;  $I = \mathbb{R}$
- $\cos(2x) = \frac{1}{2}$  ;  $I = ]-\pi; 2\pi]$
- $\sqrt{2}\cos(3x) = 1$  ;  $I = ]-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}[$
- $\sqrt{3}\tan(x) = -3$  ;  $I = ]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$
- $\cos^3(x) + \sin^2(x) = 1$  ;  $I = \mathbb{R}$

## Exercice 2

Résoudre dans l'intervalle  $I$  les équations suivantes :

- $\sin(x) = -\sin\frac{\pi}{7}$  ;  $I = \mathbb{R}$
- $\cos(2x) = -\cos\frac{\pi}{8}$  ;  $I = [0; 2\pi]$
- $\cos(3x) = -\sin\frac{\pi}{3}$  ;  $I = ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
- $\cos(3x) = -\sin(x)$  ;  $I = \mathbb{R}$

## Exercice 3

Résoudre dans l'intervalle  $I$  les équations suivantes :

- $\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{7}$  ;  $I = \mathbb{R}$
- $\cos(2x)\cos(3x) = 0$  ;  $I = ]-\pi; \pi]$
- $\tan(x).\tan(2x) = 1$  ;  $I = ]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$
- $\tan(x) = \sin(x)$  ;  $I = \mathbb{R}$

## Exercice 4

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$\tan(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} ; \tan(x) = \tan\left(\frac{7\pi}{11}\right) ; \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

2) Résoudre dans l'intervalle  $I$  les équations :

- $\tan(x) = \tan\frac{\pi}{5}$  ;  $I = [0; 3\pi]$
- $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$  ;  $I = [-2\pi; \pi]$

## Exercice 5

Résoudre dans l'intervalle  $I$  les équations suivantes :

- $\sin(x) = \cos\frac{\pi}{8}$  ;  $I = [0; 3\pi]$
- $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  ;  $I = \left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$
- $\sin(x) = \frac{1}{2}$  ;  $I = \left[-\frac{\pi}{4}; 3\pi\right]$

## Exercice 6

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

- $\sin(x).\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$  ; 2)  $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$
- $\sin^2(x) - 16 = 0$  ; 4)  $\sin^2(x) - \cos^2(x) = 0$

## Exercice 7

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

- $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
- $\tan\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right) = \tan(3x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
- $\tan\left(x + \frac{4\pi}{3}\right).\tan(2x) = 1$

## Exercice 8

On considère dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :

$$(E): \cos^3 x + \sin^3 x + 2 = 3(\cos x + \sin x)(1 - \cos x \cdot \sin x)$$

et  $S$  l'ensemble des solutions de  $(E)$ .

- Montrer que  $x \in S$  équivaut à  $(\cos x + \sin x)(1 - \cos x \cdot \sin x) = 1$ .
- On pose  $\cos x + \sin x = t$ 
  - Montrer que  $x \in S$  équivaut à  $t^3 - 3t + 2 = 0$
  - Résoudre l'équation à  $t^3 - 3t + 2 = 0$ .
  - En déduire l'ensemble  $S$ .

## Exercice 9

Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les systèmes suivants :

- $\begin{cases} \cos 2x = \cos y \\ x - y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$  ; 2)  $\begin{cases} \sin x = \sin y \\ x - 2y = \frac{\pi}{4} \end{cases}$
- $\begin{cases} \tan x = \tan y \\ x + y = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$  ; 4)  $\begin{cases} \sin(2x - y) = 0 \\ \cos(x - 2y) = 0 \end{cases}$

## Inéquations trigonométriques

## Exercice 10

Résoudre dans l'intervalle  $I$  les inéquations suivantes :

- $\cos(x) \geq \frac{1}{2}$  ;  $I = ]-\pi; \pi]$
- $\cos(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$  ;  $I = [0; 2\pi]$
- $\tan(x) > -1$  ;  $I = [0; 2\pi]$
- $\sin(x) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$  ;  $I = [0; 2\pi]$
- $\tan(x) < -\sqrt{3}$  ;  $I = [-\pi; \pi]$

## Exercice 11

Résoudre dans l'intervalle  $[0; 2\pi]$  les inéquations :

$$\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} ; \sin x \leq \frac{1}{2} ; \cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan x \geq 1 ; \tan x \leq \sqrt{3} ; \tan x \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

## Exercice 12

Résoudre dans l'intervalle  $[0; 2\pi]$  les inéquations :

$$\cos(x).\sin(x) \geq 0 ; 2\sin^2(x) + \sin(x) \leq 0 ;$$

$$2\cos^2(x) - \cos(x) > 0 ;$$

$$(2\sin(x) - 1)(\sqrt{3}\tan(x) + 1) > 0$$

## Loi des sinus - aire d'un triangle

## Exercice 13

Soit  $ABC$  un triangle tel que :

$$\hat{B} = \frac{\pi}{6}, BA = c = \sqrt{3} \text{ et } AC = b = \sqrt{3}$$

Calculer  $\hat{A}$ ,  $\hat{C}$ ,  $BC$ ,  $S$ ,  $R$  et  $r$

## Exercice 14

Soit  $ABC$  un triangle tel que :

$$\hat{A} = \frac{\pi}{4}, BC = a = 4 \text{ et } AC = b = 4$$

Calculer  $AB$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ ,  $S$ ,  $R$  et  $r$

## Exercice 15

Soit  $ABC$  un triangle tel que :

$$\hat{A} = \frac{\pi}{4}, \hat{B} = \frac{\pi}{6} \text{ et } R = 4$$

Calculer  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$ ,  $\hat{C}$ ,  $S$ ,  $R$  et  $r$

## Exercice 16

Soit  $ABC$  un triangle tel que :

$$AB = \sqrt{3}, AC = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}, BC = \sqrt{2} \text{ et } \widehat{BCA} = \frac{\pi}{3}$$

- Calculer  $\sin \widehat{BAC}$  puis déduire une mesure de  $\widehat{BAC}$
- Vérifier que  $\widehat{ABC} = \frac{5\pi}{12}$  puis déduire la valeur de  $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$  et  $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$
- Calculer l'aire du triangle  $ABC$  ainsi que les deux rayons des deux cercles inscrit et circonscrit du triangle  $ABC$ .

## Exercice 17

Soit  $ABC$  un triangle tel que :  $AB = 4$ ,  $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$  et  $\hat{B} = \frac{\pi}{4}$

On pose  $AC = b$  et  $BC = a$

- Montrer que  $b = \frac{a\sqrt{6}}{3}$
- a) Montrer que  $a^2 + 4a\sqrt{6} - 48 = 0$   
b) Calculer  $a$  puis déduire la valeur de  $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$
- Calculer l'aire du triangle  $ABC$  ainsi que les deux rayons de ses deux cercles inscrit et circonscrit.

## Exercice 18

Soit  $ABC$  un triangle inscrit dans un cercle  $(C)$  de centre  $O$  et de rayon  $R$ .

$H$  est le projeté orthogonal de  $O$  sur  $(BC)$ .

Le demi droit  $[OH]$  coupe le cercle  $(C)$  au point  $I$ .

On pose  $\widehat{BAC} = \alpha$

- Montrer que :  
 $IC = 2R \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$  et  $CH = 2R \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
- Déduire que :  $\sin \alpha = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

## Exercice 19

Soit  $ABC$  un triangle, on pose

$$BC = a, AC = b \text{ et } AB = c$$

- Montrer que :  $\sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \sin^2 \hat{A}$
- Déterminer la nature du triangle  $ABC$  dans le cas où  $\sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C} = \sin^2 \hat{A}$
- Montrer que  $\sin \hat{A} - \sin \hat{B} = \frac{1}{2R} (a - b)$
- Déduire que :  
 $c(\sin \hat{A} - \sin \hat{B}) + a(\sin \hat{B} - \sin \hat{C}) + b(\sin \hat{C} - \sin \hat{A}) = 0$

## Angles inscrits-quadrilatères inscrits

## Exercice 20

Un cerf-volant est quadrilatère dont une des diagonales est un axe de symétrie.

On veut établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'un cerf-volant soit inscrit.

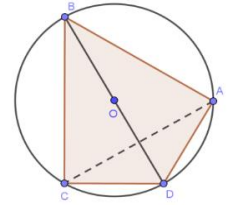
On considère un cerf-volant  $ABCD$  inscrit et  $O$  le milieu de  $[BD]$

1) On suppose que  $\widehat{BCD} = \widehat{BAD} = \frac{\pi}{2}$  M.q  $ABCD$  est inscrit.

2) On suppose que  $ABCD$  est inscrit

- Vérifier que  $[BD]$  est un diamètre du cercle circonscrit au quadrilatère  $ABCD$ .
- Déterminer la nature des triangles  $BCD$  et  $BAD$ .
- On déduire que :  $\widehat{BCD} = \widehat{BAD} = \frac{\pi}{2}$

3) Conclure.



## Exercice 21

Soit  $(C)$  un cercle,  $[BC]$  une corde, et  $A \in (C)$  tels que les arcs  $AB$  et  $AC$  soient égaux. Soient  $[AD]$  et  $[AE]$  deux autres cordes d'extrémités  $A$ , qui coupent  $[BC]$  en  $F$  et en  $G$  respectivement.

Montrer que  $DEFG$  est inscrit.

## Exercice 22

Soient  $C$  et  $D$  deux points distincts d'un demi-cercle de diamètre  $[AB]$ . Les droites  $(AC)$  et  $(BD)$  se coupent en  $E$ , les droites  $(AD)$  et  $(BC)$  se coupent en  $F$ .

- Montrer que les milieux des segments  $[AB]$ ,  $[CD]$  et  $[EF]$  sont alignés.
- Montrer que le quadrilatère  $CFDE$  est inscrit.

## Exercice 23

Soit  $ABC$  un triangle d'orthocentre  $H$ . On supposera pour simplifier que  $H$  est intérieur au triangle (triangle acutangle). On considère  $H_A$ ,  $H_B$  et  $H_C$  les symétriques de  $H$  respectivement par rapport à  $(BC)$ ,  $(AC)$  et  $(AB)$ . Montrer que les quadrilatères :

$AH_ABC$ ,  $AH_BBC$  et  $AH_CBC$  sont inscrits.

## Exercice 24 (Exercice d'olympiade nationale)

$ABC$  un triangle et  $(C)$  son cercle circonscrit. On considère un point  $E$  de la tangente  $(T)$  au cercle  $(C)$  au point  $A$ . Les points  $P$  et  $Q$  sont respectivement les projections orthogonales de  $E$  sur  $(AB)$  et  $(AC)$

- Montrer que  $(PQ) \perp (BC)$
- La tangente  $(T)$  et la bissectrice intérieure de l'angle  $\widehat{BAC}$  coupent la droite  $(BC)$  respectivement aux points  $F$  et  $D$ . Montrer que  $FD = FA$

