

9

# Trigonométrie 1

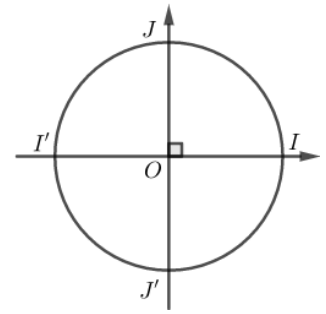


# 1) Cercle trigonométrique – Abscisses curvilignes

## Activité 1 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ .

On considère le cercle  $(U)$  de centre  $O$  et de rayon  $R=1$  (Voir la figure ci-contre).



1) Déterminer les coordonnées des points  $I, J, I'$  et  $J'$  dans le repère  $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ .

2) a) Calculer le périmètre du cercle  $(U)$  et en déduire la longueur de l'arc  $\widehat{II'}$ .

b) En déduire la longueur des arcs  $\widehat{IJ}$  et  $\widehat{IJ'}$  qui ne contient pas  $I'$ .

c) Déterminer la longueur des arcs  $\widehat{IJ}$  et  $\widehat{IJ'}$  qui contient  $I'$ .

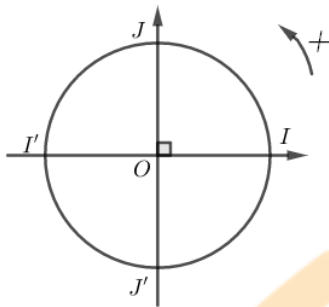
## Définition 1 : Orientation d'un cercle

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ .

- Orienter un arc du cercle c'est choisir un même sens de parcours circulaire.
- On prendra comme **sens positif** le sens contraire de déplacement des aiguilles d'une montre, il sera appelé **sens direct** ou sens trigonométrique, l'autre sens sera appelé sens indirect ou négatif.

## Définition 2 : Cercle trigonométrique

Le **cercle trigonométrique** est un cercle orienté, muni d'un repère orthonormé  $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ , de centre  $O$ , de rayon 1 et muni d'un point origine : (le point  $I$ ).



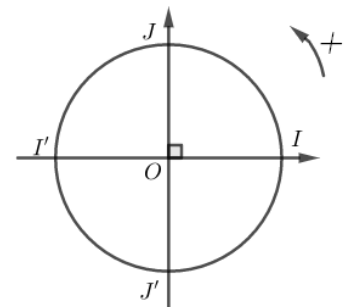
## Définition 3 : Abscisses curvilignes :

Soit  $(U)$  un cercle trigonométrique.

- Tout réel  $x$  est représenté sur  $(U)$  par un unique point  $M$ .
- Le nombre  $x$  est appelé une **abscisse curviligne** du point  $M$  et on écrit  $M(x)$ .
- $M$  se déplace sur le cercle à partir de  $I$  vers le sens positif avec la distance  $x$  (si  $x \geq 0$ ) ou vers le sens négatif avec la distance  $-x$  (si  $x \leq 0$ )

## Exemple 1 :

- Le nombre  $0$  est une abscisse curviligne du point  $I$  (c'est-à-dire  $I(0)$ ).
- Le nombre  $\frac{\pi}{2}$  est une abscisse curviligne du point  $J$  (c'est-à-dire  $J(\frac{\pi}{2})$ ).
- Le nombre  $-\frac{\pi}{2}$  est une abscisse curviligne du point  $J'$  (c'est-à-dire  $J'(-\frac{\pi}{2})$ ).
- Le nombre  $\pi$  est une abscisse curviligne du point  $I'$  (c'est-à-dire  $I'(\pi)$ ).
- Le nombre  $-\pi$  est une abscisse curviligne du point  $I'$  (c'est-à-dire  $I'(-\pi)$ ).
- Le nombre  $\frac{3\pi}{2}$  est une abscisse curviligne du point  $J'$  (c'est-à-dire  $J'(\frac{3\pi}{2})$ ).
- Le nombre  $2\pi$  est une abscisse curviligne du point  $I$  (c'est-à-dire  $I(2\pi)$ ).



## Propriétés 1 :

- Si  $x$  est une abscisse curviligne d'un point  $M$ , alors tout nombre s'écrit sous la forme  $x + 2k\pi$  tel que  $k \in \mathbb{Z}$  est aussi une abscisse curviligne du point  $M$ .
- $x$  et  $y$  sont deux abscisses curvilignes d'un même point si et seulement s'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $x - y = 2k\pi$ .
- On écrit dans ce cas  $x \equiv y [2\pi]$  et on lit :  $x$  est congru à  $y$  modulo  $2\pi$ .

### Exemple 2 :

Dans chacun des cas suivants, vérifier que si  $x$  et  $y$  sont deux abscisses curvilignes d'un même point :

1)  $x = \frac{23\pi}{8}$  et  $y = \frac{-9\pi}{8}$  .

2)  $x = \frac{15\pi}{6}$  et  $y = \frac{45\pi}{6}$  .

3)  $x = \frac{123\pi}{12}$  et  $y = \frac{267\pi}{12}$  .

### Remarques 1 :

Pour tout réels  $x$ ,  $y$  et  $z$  on a :

- $x \equiv y[2\pi] \Leftrightarrow x = y + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$
- $y \equiv x[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv y[2\pi]$  .
- Si  $x \equiv y[2\pi]$  et  $y \equiv z[2\pi]$ , alors  $x \equiv z[2\pi]$  .
- Si  $x \equiv y[2\pi]$  et  $x \equiv z[2\pi]$ , alors  $y \equiv z[2\pi]$  .

### Définition 4 : L'abscisse curviligne principale :

Si  $M(x)$  et  $x \in ]-\pi; \pi]$  alors  $x$  est appelé l'**abscisse curviligne principale** du point  $M$  .

### Exemple 3 :

Soit  $x$  une abscisse curviligne d'un point  $M$ , déterminer l'abscisse curviligne principale de  $M$  :

1)  $x = \frac{67\pi}{3}$     2)  $x = 2024\pi$     3)  $x = 317\pi$

4)  $x = \frac{205\pi}{4}$     5)  $x = \frac{41\pi}{6}$     6)  $x = \frac{2021\pi}{3}$  .

### Technique pour déterminer l'abscisse curviligne principale :

Soit  $M(\frac{a\pi}{b})$  un point du cercle trigonométrique avec  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$  et  $|a| \geq b$  .

1) Si  $\frac{a}{b}$  n'est pas un entier relatif impair on encadre  $\frac{a}{b}$  par deux entiers consécutifs  $n$  et  $n+1$  tels que

$$n \leq \frac{a}{b} < n+1 .$$

L'un des deux entiers  $n$  ou  $n+1$  est pair : soit  $N$  cet entier.

L'abscisse curviligne principale de  $M(\frac{a\pi}{b})$  est  $\frac{a\pi}{b} - N\pi$  .

2) Si  $\frac{a}{b}$  est un entier relatif impair alors l'abscisse curviligne principale de  $M(\frac{a\pi}{b})$  est  $\pi$  .

### Exemple 4 :

Déterminer l'abscisse curviligne principale de  $M(x)$  dans les cas suivants :

1)  $x = \frac{33\pi}{4}$

2)  $x = \frac{267\pi}{5}$

3)  $x = \frac{-43\pi}{6}$

4)  $x = \frac{-11\pi}{3}$  .

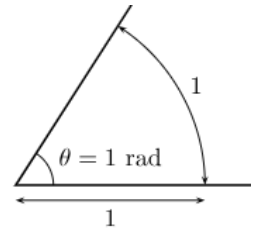
Exercices : Exercices 1, 2 et 3 de la série 9.



## 2) Angle orienté de deux vecteurs

### Définitions 5 : Unités de mesure des angles

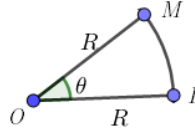
- Le degré est le grade sont deux unités de mesure pour les angles.
- L'angle plat à pour mesure en degré :  $180^\circ$  et en **grade** :  $200gr$ .
- Le radian** est une autre unité de mesure des angles, 1 radian est la mesure d'un angle au centre interceptant un arc de longueur égale à l'unité.
- Si la mesure d'un angle est exprimée en radian, on fait suivre le nombre par l'abréviation " rad "



### Propriétés 2 :

- Un arc d'un cercle de rayon  $R$  a pour longueur  $R \times \theta$  où  $\theta$  est la mesure en radian de l'angle au centre interceptant l'arc.

- On a  $\theta = \frac{\widehat{IM}}{R}$  c'est-à-dire  $\widehat{IM} = R \times \theta$ .



- Un secteur d'un cercle de rayon  $R$  a pour aire  $\frac{R^2 \times \theta}{2}$  où  $\theta$  est la mesure en radian d'un angle au centre interceptant l'arc du secteur.

- Si  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont les mesures respectives d'un même angle géométrique en degré, en radian et en grade alors on a

$$\frac{x}{180} = \frac{y}{\pi} = \frac{z}{200}$$

### Exemple 5 :

Compléter le tableau suivant :

Degré	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
Radian									
Grade									



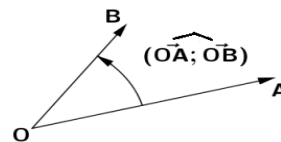
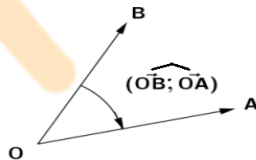
### Remarque 2 :

- L'unité d'angle du Système international est le radian.
- $180^\circ = \pi$  (rad)

### Définitions 6 : Angle orienté de deux demi-droites ayant même origine - angle orienté de deux vecteurs

Soit  $A$ ,  $B$  et  $O$  trois points du plan.

- Un angle orienté de sommet  $O$  est un couple de 2 demi-droites de même origine  $[OA)$  et  $[OB)$ .
- Les deux demi-droites sont appelées les côtés de l'angle.
- Cet angle est appelé aussi **angle orienté** de deux vecteurs  $\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{OB}$ . On le note par  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$



- La mesure de l'angle orienté**  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$  est noté  $\overline{(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})}$  il est précédé du signe + si l'angle orienté est de sens positif et du signe - dans l'autre cas.

- Si  $\alpha$  est une mesure de l'angle orienté  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$  alors tout nombre s'écrit sous la forme  $\alpha + 2k\pi$  tel que  $k \in \mathbb{Z}$  est aussi une mesure de cet angle. On écrit  $\overline{(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})} \equiv \alpha [2\pi]$ .

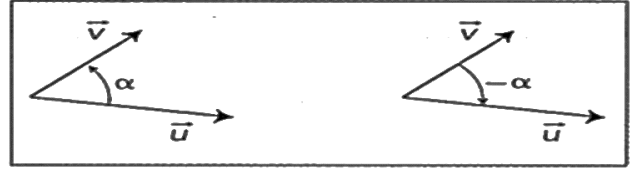
### Définition 7 : La mesure principale d'un angle orienté.

Si  $\overline{(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})} \equiv \alpha [2\pi]$  et  $\alpha \in ]-\pi; \pi]$  alors  $\alpha$  est appelé la **mesure principale** de l'angle orienté  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$

### Propriétés 3 :

Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs non nuls du plan orienté. On a :

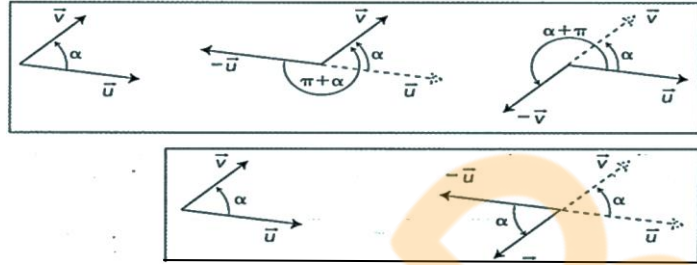
- $(\overrightarrow{\vec{v}}; \overrightarrow{\vec{u}}) \equiv -(\overrightarrow{\vec{u}}; \overrightarrow{\vec{v}}) [2\pi]$
- $(\overrightarrow{\vec{u}}; \overrightarrow{\vec{w}}) + (\overrightarrow{\vec{w}}; \overrightarrow{\vec{v}}) \equiv (\overrightarrow{\vec{u}}; \overrightarrow{\vec{v}}) [2\pi]$  (Relation de Chasles)



### Remarques 3 :

1)  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs non nuls du plan orienté. On a :

- $(\overrightarrow{-\vec{u}}; \overrightarrow{\vec{v}}) \equiv \pi + (\overrightarrow{\vec{u}}; \overrightarrow{\vec{v}}) [2\pi]$
- $(\overrightarrow{\vec{u}}; \overrightarrow{-\vec{v}}) \equiv \pi + (\overrightarrow{\vec{u}}; \overrightarrow{\vec{v}}) [2\pi]$
- $(\overrightarrow{-\vec{u}}; \overrightarrow{-\vec{v}}) \equiv (\overrightarrow{\vec{u}}; \overrightarrow{\vec{v}}) [2\pi]$ .



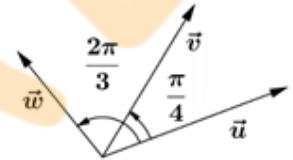
2)  $a$  et  $b$  deux réels non nuls. On a :

- $(\overrightarrow{a\vec{u}}; \overrightarrow{b\vec{v}}) \equiv (\overrightarrow{\vec{u}}; \overrightarrow{\vec{v}}) [2\pi]$  si  $ab > 0$
- $(\overrightarrow{a\vec{u}}; \overrightarrow{b\vec{v}}) \equiv \pi + (\overrightarrow{\vec{u}}; \overrightarrow{\vec{v}}) [2\pi]$  si  $ab < 0$

### Exemple 6 :

On considère la figure ci-contre :

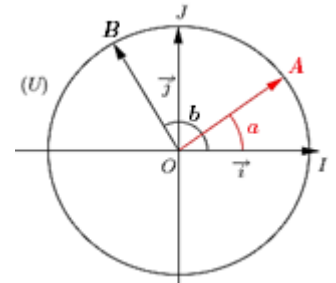
Déterminer les mesures suivantes :  $(\overrightarrow{\vec{v}}; \overrightarrow{\vec{w}})$  ;  $(\overrightarrow{\vec{w}}; \overrightarrow{\vec{v}})$  ;  $(\overrightarrow{7\vec{v}}; \overrightarrow{-5\vec{w}})$  ;  $(\overrightarrow{2\vec{v}}; \overrightarrow{4\vec{w}})$ .



### Propriétés 4 :

Si  $A(a)$  et  $B(b)$  deux points sur un cercle trigonométrique de centre  $O$  et d'origine  $I$  alors on a :

- $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA}) \equiv a [2\pi]$ . Autrement dit l'abscisse curviligne d'un point  $A$  du cercle trigonométrique est une mesure de l'angle orienté  $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA})$
- $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \equiv b - a [2\pi]$ .



**Exercices :** Exercices 4, 5, 6, 7 et 8 de la série 9.

## 3) Cosinus, sinus et tangente d'un nombre réel

### Définitions 8 : Cosinus et sinus d'un nombre réel

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$  et  $(U)$  le cercle trigonométrique de centre  $O$ .

Soit  $x$  un réel et  $M$  le point de  $(U)$  d'abscisse curviligne  $x$ .

- On appelle l'abscisse du point  $M$  dans le repère orthonormé  $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$  par **cosinus** du nombre réel  $x$  et on le note par :  $\cos(x)$
- On appelle l'ordonnée du point  $M$  dans le repère orthonormé  $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$  par **sinus** du nombre réel  $x$  et on le note par :  $\sin(x)$

### Propriétés 5 :

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$  et  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  on a  $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$  et  $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$



## Propriété 6 :

Tableau de signe de  $\sin(x)$  et  $\cos(x)$  sur l'intervalle  $[-\pi; \pi]$  :

$X$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\sin(X)$	○ —	— ○	○ +	+ ○	○
$\cos(X)$	—	○ +	+ ○	○ —	—

## Exemple 7 :

1) Calculer  $\cos(x)$  sachant que  $\sin(x) = -\frac{2}{3}$  et  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$

2) Calculer  $\sin(\alpha)$  sachant que  $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{7}}{5}$  et  $\alpha \in \left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

## Exemple 8 :

1) Déterminer à l'aide du cercle trigonométrique les valeurs suivants

$\cos(0)$ ,  $\sin(0)$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\cos(\pi)$ ,  $\sin(\pi)$ ,  $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  et  $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

2) Montrer que  $\cos\left(\frac{49\pi}{2}\right) = 0$  et  $\sin\left(\frac{2023\pi}{2}\right) = -1$

## Les lignes trigonométriques de base

$\cos(\pi) = -1$  ;  $\sin(\pi) = 0$  ;  $\tan(\pi) = 0$

Soit  $\alpha \in \left\{0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right\}$ , on a :

- $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{\text{Nombre de doigts au dessus de } \alpha}}{2}$

- $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{\text{Nombre de doigts en dessous de } \alpha}}{2}$

- $\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{\text{Nombre de doigts en dessous de } \alpha}}{\sqrt{\text{Nombre de doigts au dessus de } \alpha}}$



## Exemple 9 :

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dots$	$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \dots$	$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dots$	$\cos(0) = \dots$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dots$
$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dots$	$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \dots$	$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dots$	$\sin(0) = \dots$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dots$
$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dots$	$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \dots$	$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dots$	$\tan(0) = \dots$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dots$

## Définition 9 : Tangente d'un nombre réel

$(O; \vec{OI}; \vec{OJ})$  un repère orthonormé du plan et  $(U)$  le cercle trigonométrique de centre  $O$ .

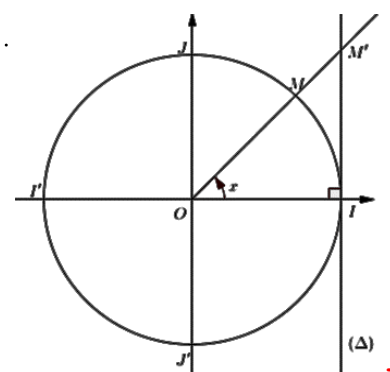
Soit  $x$  un réel tel que  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ou  $k \in \mathbb{Z}$

On note  $M$  le point de  $(U)$  d'abscisse curviligne  $x$ .

Soit  $M'$  le point d'intersection de la droite  $(OM)$  et la droite  $(\Delta)$  tangente à  $(U)$  en  $I$ .

On considère la droite  $(\Delta)$  est graduée d'origine  $I$  et de même unité  $OI = 1$

L'abscisse du point  $M'$  sur la droite  $(\Delta)$  est appelée **tangente**  $x$  on le note  $\tan(x)$



### Remarque 4 :

Tangente n'existe pas pour les nombres  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  car  $(OJ)$  et  $(OJ')$  ne coupe pas  $(\Delta)$

### Propriétés 7 :

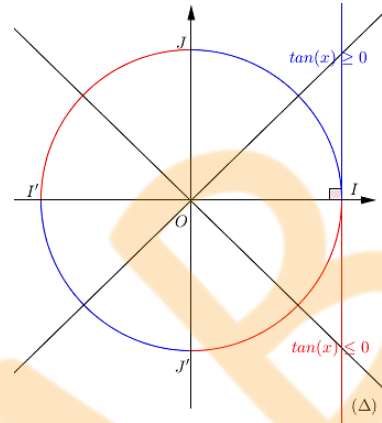
Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$  on a

•  $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$  ; •  $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$  ; •  $\tan(x + 2k\pi) = \tan(x)$

### Propriétés 8 :

Tableau de signe de  $\tan(x)$  sur l'intervalle  $[-\pi; \pi]$

$X$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\tan(X)$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$



### Exemple 10 :

1) Calculer  $\tan(x)$  sachant que  $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{3}$  et  $x \in \left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right[$

2) Calculer  $\sin(\alpha)$  sachant que  $\tan(\alpha) = -\sqrt{5}$  et  $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$

### Remarque 5 :

On a  $(\cos(x))^2 = \cos^2(x)$ ,  $(\sin(x))^2 = \sin^2(x)$  et  $(\tan(x))^2 = \tan^2(x)$

**Exercices :** Exercices 9, 10, 11 et 12 de la série 9.

## 4) Les relations entre les lignes trigonométriques

### Activité 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$  et  $(U)$  le cercle trigonométrique de centre  $O$ .

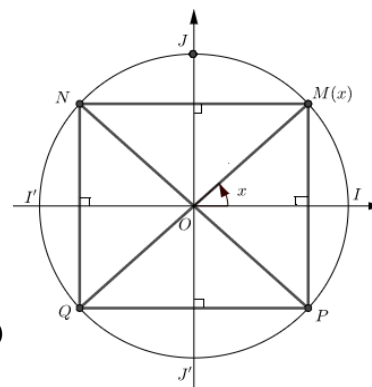
Soit  $x$  un réel tel que  $x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$  et  $M$  le point de  $(U)$  d'abscisse curviligne  $x$  (Voir la figure ci-contre)

1) a) Vérifier que les coordonnées des points  $P$ ,  $N$  et  $Q$  dans le repère  $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$  sont :  $P(\cos(x); -\sin(x))$ ,  $N(-\cos(x); \sin(x))$  et  $Q(-\cos(x); -\sin(x))$

b) Vérifier que  $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OP}) \equiv -x[2\pi]$ ,  $(\overrightarrow{ON}; \overrightarrow{OI'}) \equiv x[2\pi]$  et  $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OQ}) \equiv x[2\pi]$

2) a) En déduire que les abscisses curvilignes des points  $P$ ,  $N$  et  $Q$  dans le cercle  $(U)$  sont :  $P(-x)$ ,  $N(\pi - x)$  et  $Q(\pi + x)$

b) En déduire que  $\begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \end{cases}$ ,  $\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi - x) = \sin(x) \end{cases}$  et  $\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi + x) = \sin(x) \end{cases}$



### Propriétés 9 :

Pour tout réel  $x$  on a :  $\begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \end{cases}$ ,  $\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi - x) = \sin(x) \end{cases}$  et  $\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi + x) = -\sin(x) \end{cases}$

### Exemple 11 :

Calculer :  $\cos(-\frac{\pi}{6})$ ,  $\sin(-\frac{\pi}{6})$ ,  $\tan(\pi - \frac{\pi}{3})$ ,  $\tan(\pi + \frac{\pi}{4})$ ,  $\sin(\frac{3\pi}{4})$ ,  $\cos(\frac{4\pi}{3})$  et  $\tan(\frac{5\pi}{6})$



**Propriété 10 :**

Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$  on a :

$$\begin{cases} \tan(-x) = -\tan(x) \\ \tan(\pi - x) = -\tan(x) \\ \tan(\pi + x) = \tan(x) \end{cases}$$

**Activité 3 :**

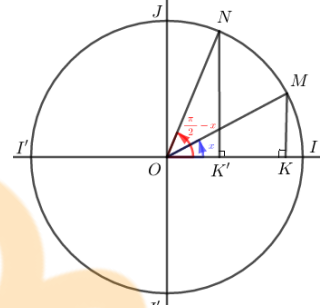
Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$  et  $(U)$  le cercle trigonométrique de centre  $O$ .

Soit  $x$  un réel, on considère les points  $M$  et  $N$  d'abscisses curvilignes  $x$  et  $\frac{\pi}{2} - x$  respectivement (Voir la figure)

1) a) Montrer que les triangles  $OMK$  et  $ONK'$  sont égaux

b) En déduire que  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

2) En écrivant  $\frac{\pi}{2} + x = \frac{\pi}{2} - (-x)$  déduire que  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$



**Propriétés 11 :**

Pour tout réel  $x$  on a :

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x) \end{cases}$$

**Exemple 12 :**

1) Vérifier que  $\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$  ; 2) En déduire  $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$  et  $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

**Exemple 13 :**

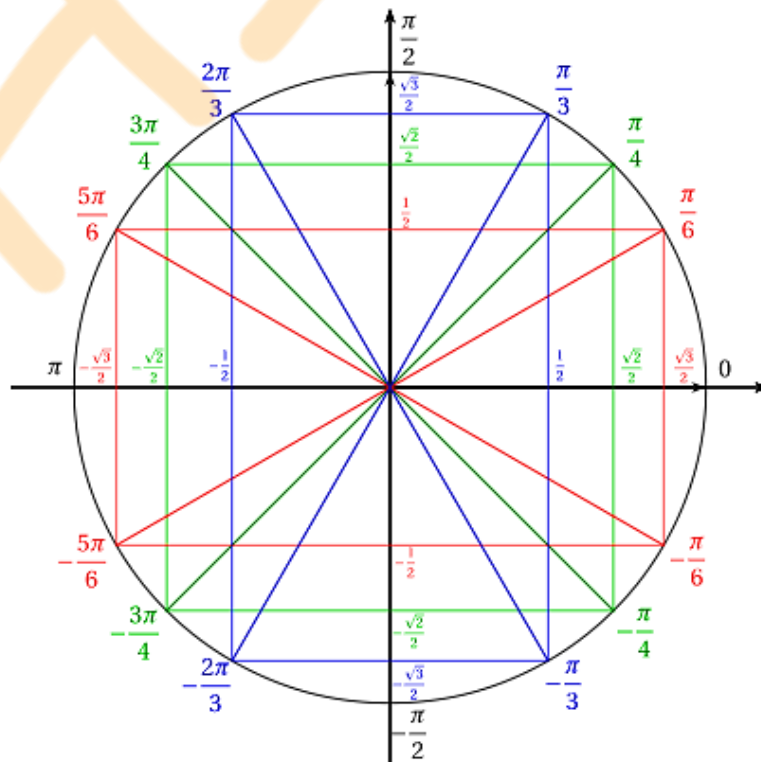
Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi \right\}$  on a :  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$  et  $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$

**Propriétés 12 :**

Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi \right\}$  on a :  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$  et  $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$

**Exemple 14 :** Sachant que  $\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$  calculer  $\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

**Exercices :** Exercices 13, 14 et 15 de la série 9.



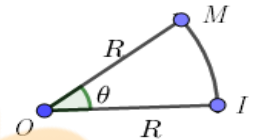
# Résumé 9 : Trigonométrie 1

- Le **cercle trigonométrique** est un cercle orienté, muni d'un repère orthonormé  $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ , de centre  $O$ , de rayon 1 et d'origine  $I$ .
- Tout réel  $x$  est représenté sur le cercle trigonométrique  $(U)$  par un unique point  $M$ . Le réel  $x$  est appelé une **abscisse curviligne** du point  $M$  et on écrit  $M(x)$ .
- Si  $x$  est une abscisse curviligne d'un point  $M$ , alors tout nombre s'écrit sous la forme  $x + 2k\pi$  tel que  $k \in \mathbb{Z}$  est aussi une abscisse curviligne du point  $M$ .
- $x$  et  $y$  sont deux abscisses curvilignes d'un même point si et seulement s'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $x - y = 2k\pi$ .
- Si  $M(x) \in (U)$  et  $x \in ]-\pi; \pi]$  alors  $x$  est l'**abscisse curviligne principale** du point  $M$ .

• Il existe une technique pour déterminer l'abscisse curviligne principale d'un point donné  $M(\frac{a\pi}{b})$  (voir la page 69)

• Le **radian** est une unité de mesure des angles, on a :  $180^\circ = \pi$  (rad)

• Si  $I$  et  $M$  deux points d'un cercle de rayon  $R$  alors :  $\theta$  (rad) =  $\frac{\widehat{IM}}{R}$  c'est-à-dire  $\widehat{IM} = R \times \theta$ .



• L'aire du secteur  $\widehat{IM}$  est  $\frac{R^2 \times \theta}{2}$  ( $\theta$  est exprimé en radian)

• Si  $M(x) \in (U)$  alors les coordonnées de  $M$  dans le repère  $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$  sont :  $M(\cos(x); \sin(x))$

## Les relations entre les lignes trigonométriques



	$x + 2k\pi$	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
$\sin$	$\sin(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$
$\cos$	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\sin(x)$
$\tan$	$\tan(x)$	$-\tan(x)$	$\tan(x)$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\tan(x)}$	$-\frac{1}{\tan(x)}$

## Propriétés usuelles

$-1 \leq \cos(x) \leq 1$
$-1 \leq \sin(x) \leq 1$
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

## Tableau de signe de $\sin(x)$ , $\cos(x)$ et $\tan(x)$ sur $[-\pi; \pi]$

$X$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\sin(X)$	○ —	—	○ +	+ —	○
$\cos(X)$	—	○ +	+ —	○	—
$\tan(X)$	○ +	—	○ +	+ —	○

• La mesure de l'angle orienté  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$  est noté  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$

• L'écriture  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \equiv \alpha [2\pi]$  se lit « la mesure de l'angle orienté

$(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$  est congru à  $\alpha$  modulo  $2\pi$  »

•  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \equiv \alpha [2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \alpha + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$

• Si  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \equiv \alpha [2\pi]$  et  $\alpha \in ]-\pi; \pi]$  alors  $\alpha$  est la **mesure principale** de l'angle orienté  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$

•  $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA}) \equiv -(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) [2\pi]$

•  $(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB}) \equiv (\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) [2\pi]$  (Relation de Chasles)

• Si  $A(a)$  et  $B(b)$  deux points sur un cercle trigonométrique de centre  $O$  et d'origine  $I$  alors :

$(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA}) \equiv a [2\pi]$  et  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \equiv b - a [2\pi]$ .

• Les lignes trigonométriques de base  $\cos(\pi) = -1$  ;  $\sin(\pi) = 0$  ;  $\tan(\pi) = 0$



Soit  $\alpha \in \left\{0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right\}$ , on a :

$$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{\text{Nombre de doigts au dessus de } \alpha}}{2}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{\text{Nombre de doigts en dessous de } \alpha}}{2}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{\text{Nombre de doigts en dessous de } \alpha}}{\sqrt{\text{Nombre de doigts au dessus de } \alpha}}$$

**Exercice 1 :**

Représenter sur le cercle trigonométrique les points d'abscisses curvilignes suivants :

$$\pi; 93\pi; 2022\pi; -4\pi; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{-\pi}{3}; \frac{-\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{7\pi}{3}; \frac{17\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}; \frac{21\pi}{6}; \frac{-23\pi}{2}$$

**Exercice 2 :**

Soit  $x$  une abscisse curviligne d'un point  $M$ , déterminer l'abscisse curviligne principale de  $M$  dans les cas suivants :

$$1) x = \frac{789\pi}{7} \quad 2) x = \frac{-214\pi}{5} \quad 3) x = 15\pi$$

$$4) x = \frac{157\pi}{3} \quad 5) x = \frac{-31\pi}{4} \quad 6) x = \frac{111\pi}{6}$$

**Exercice 3 :**

Vérifier si la relation  $x \equiv y [2\pi]$  est réalisée :

$$1) x = \frac{43\pi}{12} \quad \text{et} \quad y = -\frac{5\pi}{12}$$

$$2) x = \frac{-13\pi}{8} \quad \text{et} \quad y = \frac{9\pi}{4}$$

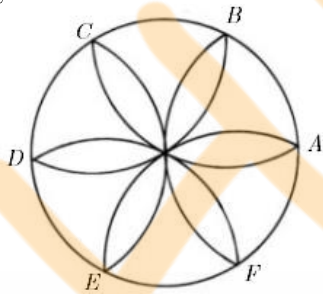
**Exercice 4 :**

Compléter le tableau suivant :

En degrés	15			127.5	
En radian		$\frac{\pi}{5}$			$\frac{\pi}{8}$
En grade			20		120

**Exercice 5 :**

On considère la rosace ci-dessous où les points  $A, B, C, D, E$  et  $F$  sont les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 3.



- Calculer la longueur du plus petit arc  $\widehat{AB}$ .
- Calculer la longueur du plus petit arc  $\widehat{BF}$ .
- Calculer la longueur totale de la rosace.
- Calculer l'aire de la rosace.

**Exercice 6 :**

$ABCD$  un carré de centre  $O$  tel que  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Déterminer :  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC})$ ;  $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA})$ ;  $(\overrightarrow{BO}; \overrightarrow{DC})$ ;  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

**Exercice 7 :**

$ABCD$  un trapèze rectangle de bases  $[AB]$  et  $[CD]$ .

Trouver la mesure principale de chacun des angles orientés :

- $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BA})$
- $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AC})$
- $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$
- $(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CB})$
- $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AD})$

**Exercice 8 :**

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs tel que  $(\vec{u}; \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

Déterminer les mesures suivantes :

$$(\vec{v}; \vec{u}); (\overrightarrow{3\vec{v}}; \overrightarrow{2\vec{u}}); (\overrightarrow{3\vec{v}}; \overrightarrow{-3\vec{u}}); (\overrightarrow{-3\vec{v}}; \overrightarrow{7\vec{u}}); (\overrightarrow{-\vec{v}}; \overrightarrow{-\vec{u}}); (\overrightarrow{-5\vec{v}}; \overrightarrow{-\frac{9}{2}\vec{u}})$$

**Exercice 9 :**

A l'aide d'un cercle trigonométrique, montrer que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Exercice 10 :**

Calculer  $\tan\left(\frac{13\pi}{3}\right)$ ,  $\sin\left(-\frac{47\pi}{6}\right)$  et  $\cos\left(\frac{8081\pi}{4}\right)$

**Exercice 11 :**

- Calculer  $\cos(x)$  sachant que  $\tan(x) = \sqrt{2} - 1$  et  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
- Calculer  $\tan(y)$  sachant que  $\sin(y) = -\frac{1}{3}$  et  $y \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$
- Déterminer  $\tan(z)$  sachant que  $\tan^2(z) + 2\sqrt{3}\tan(z) - 1 = 0$

**Exercice 12 :**

Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $\cos(x) \neq 0$

- Montrer que  $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
- Supposons que  $\tan(x) \neq 0$  montrer que  $\frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$

**Exercice 13 :**

- Calculer  $\tan\left(\frac{13\pi}{3}\right)$ ,  $\sin\left(-\frac{47\pi}{6}\right)$  et  $\cos\left(\frac{8081\pi}{4}\right)$
- Soit  $x$  un réel montrer par deux méthodes que :  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin(x)$

**Exercice 14 :**

Calculer  $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 9\pi\right)$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 81\pi\right)$ ,  $\sin\left(\frac{7\pi}{2} - 2021\pi\right)$  et  $\tan\left(\frac{\pi}{4} + 2021\pi\right)$

**Exercice 15 :**

1) Ecrire en fonction de  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$ , les expressions :

$$A = \sin(\pi + x) + \cos(3\pi - x) - \sin(x - 2\pi) + \cos(x + 9\pi)$$

$$B = \sin(x + 3\pi) + \sin(x + 12\pi) + \sin(x - \pi) + \sin(3\pi - x)$$

$$C = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sin(2\pi + x)$$

$$D = \cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right)$$

2) Ecrire en fonction de  $\tan(x)$  les expressions suivantes :

$$E = \tan(11\pi - x) + \tan(3\pi + x) + \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$F = \tan\left(\frac{13\pi}{2} - x\right) + \tan(x - 5\pi) - \tan\left(x - \frac{9\pi}{2}\right)$$